中南大学

2003 年研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

一、填空题：（每小题 6 分，共 30 分）

1、设四阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\beta_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为 4 维列向量，若 $|A|=1,|B|=2$，则 $|A+B|=()$。

2、设六阶方阵 A 的秩等于 4，则 A 的伴随矩阵 A^* 的秩等于 $()$。

3、设三阶方阵 A 的行列式 $|A|=\dfrac{1}{2}$，A^{-1} 为 A 的逆矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|A^*-(\dfrac{1}{2}A)^{-1}|=()$。

4、设 A 为 n 阶可逆矩阵，如果交换 A 的第 i 行与第 j 行得到 B，则 $BA^{-1}=()$。

5、设 A 为 n 阶方阵，若 $A\neq 3E$，秩 $(A-3E)+$ 秩 $(A+5E)=n$，则数 $\lambda=()$ 必为 A 的特征值。

二、（本题满分 20 分）设 $f(x)$ 是数域 P 上的一个 n 次多项式，这里 $n>1$，且设 $f(x)$ 的一阶微商可以整除 $f(x)$。证明 $f(x)=a(x-b)^n$，这里 $a,b\in P,a\neq 0$。

三、（本题满分 20 分）解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=d^2 \end{cases}$$

其中 a,b,c 为互不相同的常数。

四、（本题满分 25 分）设 P 是一个数域 A 是 $P^{n\times n}$ 中的一个矩阵，令

$$F(A)=\{f(A)\,|\,f(x)\in P[x]\}.$$

证明：（1） $F(A)$ 是 $P^{n\times n}$ 的一个线性子空间；

（2）可以找到非负整数 m，使

$$E,A,A^2,\cdots,A^m$$

是 $F(A)$ 的一组基；

（3）$F(A)$的维数等于A的最小多项式的次数。

五、（本题满分 25 分）设R^2是实数域R上的 2 维向量空间，

$$T: R^2 \to R^2 \qquad (x_1, x_2) \to (-x_2, x_1)$$

是线性变换。

（1） 求T在基$\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (1,-1)$下的矩阵；

（2） 证明对于每个实数C，线性变化$T - CE$是可逆变换，这里E是R^2上的恒等变换；

（3） 设T在R^2的某一基下的矩阵为$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

证明乘积$a_{12} \times a_{21}$不等于零。

六、（本题满分 20 分）设A, B为$n \times n$矩阵。证明：如果$AB = 0$，那么

秩(A)+秩$(B) \le n$。

七、（本题满分 10 分）设$A, B, C \in R^{n \times n}$，若矩阵$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$是正定的，证明

$C - BA^{-1}B^T$也正定。