中南大学

2004 年研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

下面的 E 均为 n 阶单位矩阵。

一、填空。（5 分×5=25 分）

1、当 $k=$______时，向量 $\beta=(1,k,5)$ 能由向量 $\alpha_1=(1,-3,2)$，$\alpha_2=(2,-1,1)$ 线性表示。

2、假设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A+2E=0$，则 A 的特征值为______。

3、已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2+2A-3E=0$，则 $(A+4E)^{-1}=$______。

4、设 A 是 n 阶方阵，满足 $AA^T=E$（A^T 是 A 的转置矩阵），$|A|<0$，则 $|A+E|=$______。

5、设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 $1,2,\cdots,n$，则当满足______时，$tE-A$ 为正定矩阵。

二、计算 n 阶行列式。（15 分）

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & \cdots & \cdots & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

三、证明方程组 $\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_5=a_4 \\ x_5-x_1=a_5 \end{cases}$ 有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$，在有解的情况下求出它的一切解。（15 分）

四、证明，若方程 $x^3+px+q=0$ 的两个跟 α 和 β 有关系式 $\alpha\beta+\alpha+\beta=0$，则 $-q=(p-q)^2$。（15 分）

五、（20 分）

1、证明：向量$\alpha_1=(1,1,\cdots,1,1),\alpha_2=(1,1,\cdots,1,0),\cdots,\alpha_n=(1,0,\cdots,0)$是$n$维向量空间的一组基。

2、求向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在此基下的坐标。

六、设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，证明当$n\geq 3$时，有$A^n=A^{n-2}+A^2-E$，并求$A^{100}$（$E$为3阶单位矩阵）。（20分）

七、设实二次型$f=\sum\limits_{i=1}^{s}(a_{i_1}x_1+a_{i_2}x_2+\cdots a_{i_n}x_n)^2$，证明：$f$的秩等于矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\cdots&\cdots&\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}$$的秩。（20分）

八、设A、B分别为n阶正定矩阵和半正定矩阵，证明$|A|+|B|\leq|A+B|$，且仅当$B=0$时取等号。（20分）