中南大学

2004 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

1．证明：若数列$\{x_n\}$收敛，则它有且只有一个极限。（20 分）

2．证明下列结论：

（a）$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$；（10 分）

（b）序列$x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$收敛。（20 分）

3．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b [f(x)]^2dx=0$，证明：在$[a,b]$上，恒有$f(x)=0$。（20 分）

4．在区间$D_1=(-\infty,+\infty)$和$D_2=[\frac{1}{10},10]$上，分别讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$的一致收敛性。（20 分）

5．考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在原点$(0,0)$处的可微性。（20 分）

6．设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，且$f(x)$在开区间(a,b)内没有极值点，则$f(x)$是$[a,b]$的严格单调函数。（20 分）

7．设$g_1(x)$和$g_2(x)$满足

$$\int_a^x g_1(t)dt\le\int_a^x g_2(t)dt, a\le x<b$$

及 $\int_a^b g_1(t)dt=\int_a^b g_2(t)dt$

又设$f(x)$可微，非增，则

$$\int_a^b g_1(t)f(x)dt\le\int_a^b g_2(t)f(x)dt$$（20 分）