中南大学

2005 年研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

1.（10 分）设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA^T=E$（E 是 n 阶单位阵），$|A|<0$，求：$|A+E|$.

2.（12 分）求证：下列齐次线性方程组的可解性：

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \\ 2x_1+2^2x_2+\cdots+2^nx_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots \\ nx_1+n^2x_2+\cdots+n^nx_n=0. \end{cases}$$

3.(12 分)设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数域 p 上的多项式,n 为正整数.证明:如果 $f^n(x)\mid g^n(x)$，则 $f(x)\mid g(x)$.

4.（15 分)设 $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(3,-1,2)$，$\alpha_3=(2,3,t)$.求解:

(1) t 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关?

(2) 选取 t，将 α_3 表示成 α_1,α_2 的线性组合。

5.（15 分）设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

问 t 取何值时，该二次型为正定型?

6.（12 分）设 A 是非奇异实对称矩阵，B 是反对称矩阵，且 $AB=BA$。证明 $A+B$ 必是非奇异的。

7.（20 分）设矩阵 A 的一个特征值为 3，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

（1）求 a；　　（2）求矩阵 P，使 $(AP)^TAP$ 为对角矩阵。

8.（12 分）设 A 与 B 是 n 阶矩阵，证明 AB 与 BA 有相同的特征值。

9.（20 分）设 A 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的一个线性变换，满足：$A^2=A$。证明：

（1） A 的核 $Ker(A)=\{\xi-A\xi\mid \xi\in V\}$；

（2）V 等于 A 的核与值域的直和：$V = Ker(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$。

10.（25 分）设 η 是欧氏空间 V 中的单位向量，定义 $A\alpha = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta$。证明：

（1） A 是正交变换。这样的正交变换称为镜面反射。

（2） A 是第二类的正交变换。

（3）如果在 n 维欧氏空间中，正交变换 B 以 1 作为一个特征值，且属于 1 的特征子空间 V_1 是 $n-1$ 维的，那么 B 是镜面反射。