中南大学

2005年研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

一、(共30分，每小题10分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{3})^n},(x\geq 0);$

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x];$

(3) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a,$ 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=b;$ 其中，

$$y_n=\frac{C_0^n x_0+C_1^n x_1+\cdots+C_n^n x_n}{2^n},C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}\quad k=0,1,\cdots,n$$

二、(共20分，每小题10分) 分别讨论函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间中是否一致连续：

(1) $(-l,l)$，这里 l 为随便多大的正数；

(2) 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上。

三、(20分) 证明下列拉格朗日定理并叙述其几何意义：

"若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导；则在 (a,b) 内至少存在一点 x_0，使 $f'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。"

四、(20分) 求半径为 R 的球内嵌入有最大体积的圆柱体的体积。

五、(共36分，每小题12分)

(1) 求积分 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,(b>a>0)$；

(2) 求第一类曲面积分 $\iint\limits_S(x^2+y^2)dS,$ 其中 S 为体积 $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$ 的边界；

(3) 分别研究函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在下列区间上的一致收敛性：

(a) 在 $\varepsilon\leq x\leq 2\pi-\varepsilon$ 上，其中 $\varepsilon>0$ (b) 在 $0\leq x\leq 2\pi$ 上。

六、(12分) 设 $\{\phi_n(x)\}$ 是 $[0,1]$ 上的非负可积函数序列，且 $K=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\phi_n(x)dx$ 存在。

若$\forall\alpha\in(0,1]$，有$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{1}\phi_n(x)dx=0$；证明对任何一个$[0,1]$上的连续函数$f(x)$都有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\phi_n(x)f(x)dx=Kf(0)\text{。}$$

七、（12 分）设$f(x)$，$g(x)$都是周期函数，且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$；证明

$$f(x)\equiv g(x)\text{。}$$