中南大学数学学院

2005年数学一级学科硕士研究生复试专业综合课试题

一、（10分）求位于平面Oxz上，通过原点且垂直于直线：

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-5}{1}$$

的直线方程。

二、（15分）设动点与点（4，0，0）的距离等于动点到平面$x=1$的距离的两倍，试求动点的轨迹方程，并指出它表示什么曲面。

三、1、（10分）设函数$f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$，问常数$a,b,c,d$取何值时$f(z)$在复平面内处处解析？

2、（15分）设c_1与c_2为两条互不包含、也不相交的正向简单闭曲线，证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{c_1}\frac{z^2}{z-z_0}dz+\oint_{c_2}\frac{\sin z}{(z-z_0)^2}dz\right]=\begin{cases} z_0^2 & \text{当}z_0\text{在}c_1\text{内} \\ \cos z_0 & \text{当}z_0\text{在}c_2\text{内} \end{cases}。$$

四、1、（10分）求一阶微分方程

$$y'+\frac{y}{1+x}+(1+x)y^4=0$$

的通解。

2、（15分）求微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y \end{cases}$$

的通解。

五、1、（10分）设X是定义于概率空间(Ω,F,P)取值于R的随机变量，g是$B(R)$可测函数，证明$g(X)$也是随机变量。这里R是实数集，$B(R)$是由开集生成的$\sigma-$代数。

2、（15分）设τ是一个随机变量，证明：

$$\{\tau<t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau\le t-\frac{1}{n}\}。$$