中南大学

2006 年研究生入学考试试题

试题类型：数学分析

一、判断题：（每题 5 分，共 25 分）

（1） 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $n|a_n| \to 0 (n\to\infty)$.　（）;

（2） 收敛的数列一定有界.　（）;

（3） 开区间 (a,b) 内可导的函数一定在闭区间 $[a,b]$ 上连续.　（）;

（4） 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点附近具有二阶连续导数，且 $f^{'}(x_0)=0$，$f^{''}(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处达到极小值.　（）;

（5） 若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义且是连续的，而且极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在且有限，则 $f(x)$ 在此区间上一致连续.　（）.

二、求下面数列的极限值：（每小题 10 分，共 30 分）

（1） $x_1=\sqrt{a},\cdots,x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，其中 $a>0$ 为常数;

（2） $x_0=\sqrt{2},\cdots,x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$;

（3） $x_0=1, x_1=1+\frac{x_0}{1+x_0},\cdots,x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$.

三、求下列函数的极值：（每小题 10 分，共 20 分）

（1） $y=x-\ln(1+x)$;

（2） $y=\sqrt{x}\ln x$.

四、（20 分）设 $\{na_n\}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，试证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛.

五、（15 分）若非负函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$. 则 $f(x)\equiv 0$.

六、（20 分）设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\cdot\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

其中 $x_0=a\le x_1\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=b, x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$,

$x_{i-1}\le\theta\le x_i, \Delta x_i=x_i-x_{i-1}, i=1,\cdots,n; \lambda=\max\{\Delta x_i, 1\le i\le n\}$.

七、（20 分）若函数 $f(x)$:（1）在区间 $[a,b]$ 上有二阶导函数 $f''(x)$，

（2）$f'(a)=f'(b)=0$. 则在区间 (a,b) 内至少存在一点 c 使得

$$\left|f''(c)\right|\ge\frac{4}{b-a}\cdot\left|f(b)-f(a)\right|.$$