

数学学院 2006 年硕士研究生数学类专业综合考试试题

March 29, 2006

一. (25') 求下列几何图形的方程:

1. 与原点相距个 6 单位, 且在三条坐标轴 ox, oy, oz 上的截距之比为 $a:b:c = -1:3:2$ 的平面方程;
2. 过点 $(0, 0, 3)$ 向球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 引切线, 求切线的轨迹方程, 并指出它表示什么图形?

二. (25')

1. 考虑一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, 叙述该方程在矩形域 $R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 上解的存在惟一性定理;
2. 设 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $K(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续, 试用 Picard 逐步逼近法证明方程 $\phi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)\phi(s)ds$ 当 λ 足够小时存在惟一连续解。

三. (25')

1. 设 C 表示圆周 $x^2 + y^2 = 4$,

$$f(z) = \int_C \frac{2\xi^2 + 5\xi + 1}{\xi - z} d\xi,$$

求 $f'(1+i)$ 的值.

2. 计算积分

$$f(z) = \int_{|z|=3} \frac{4z-3}{z(z-1)^2} dz.$$

- 四. (25') 设 X_1, X_2, X_3 为独立同分布随机变量, 其共同分布是 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 又设 $Y = X_1 + X_2, Z = X_1 + X_2 + X_3$, 分别求 Y 和 Z 的分布函数.