# 中南大学
# 2007年硕士研究生入学考试试题

41193

考试科目代码及名称： 883 高等代数

注意：1、所有答案（含选择题、填空题、判断题、作图题等）一律答在专用答题纸上，写在试题纸上或其他地点一律不给分。
2、作图题可以在原试题图上作答，然后将"图"撕下来贴在答题纸上相应位置。
3、考试时限：3 小时；总分：150 分。

考生编号（考生填写）

一、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1、设 $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$，$g(x)=x^2-x-1$，$(f(x),g(x))=$（ ）.

2、设 $\alpha_1=(2,4,2)$，$\alpha_2=(-1,-2,-1)$，$\alpha_3=(3,5,4)$，$\alpha_4=(1,4,-1)$，则秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$（ ）.

3、设 $R$ 是实数域，$W=\{(a,a)\mid a\in R\}$，试写出 $R^2$ 中 $W$ 的正交补.（ ）.

4、设 $\sigma$ 是向量空间 $F^2$ 上的线性变换，$\sigma:F^2\to F^2$ $(x_1,x_2)\mapsto(-x_2,x_1)$. 向量 $\xi=(1,2)$，则 $\sigma(\xi)$ 在基 $\alpha_1=(1,2),\alpha_2=(1,-1)$ 下的坐标为（ ）.

5、$t$ 取何值时，$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定二次型?（ ）

二、（本题满分 15 分）设 $m,n$ 为正整数，证明 $x^m-1$ 整除 $x^n-1$ 的充要条件是 $m$ 整除 $n$.

三、（本题满分 15 分）设 $A,B$ 都是 $n$ 阶矩阵，且 $ABA=B^{-1}$.

证明：秩 $(E-AB)+$ 秩 $(E+AB)=n$

四、（本题满分 15 分）设 $F^n$ 表示数域 $F$ 上向量空间，$\varphi$ 是按如下方法定义的线性变换：$\varphi$: $F^n \to F^n$， $\alpha \mapsto A\alpha$

$$这里，\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求线性变换 $\varphi$ 的核 $Ker(\varphi)$ 和像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ 以及 $\mathrm{Im}(\varphi^2)$.

五、（本题满分 20 分）设 $A$ 是非零实方阵，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，$A'$ 是 $A$ 的转置矩阵，$A'=A^*$.

1.（10 分）证明：$|A|\neq 0$； 2.（10 分）若 $\lambda$ 是 $A$ 的特征值，则 $|\lambda|^2=|A|$.

六、（本题满分 20 分）求下列矩阵的特征值和特征向量：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

七、（本题满分 20 分）设 $B$ 是正定矩阵，$A-B$ 是半正定矩阵，证明：

1.（10 分）$|\lambda A-B|=0$ 的所有根 $\lambda\leq 1$； 2.（10 分）$|A|\geq|B|$.

八、（本题满分 20 分）设 $V$ 和 $W$ 都是数域 $F$ 上向量空间，$L(V)$和 $L(W)$分别是 $V$ 和 $W$ 的线性变换组成的向量空间，$f$ 是 $V$ 到 $W$ 的同构映射。

1（5 分）证明：$\forall\sigma\in L(W)$，有 $f^{-1}\sigma f\in L(V)$；

2（15 分）证明：$L(W)\cong L(V)$，这里 $\cong$ 表示同构.