

中南大学
2007年硕士研究生入学考试试题

31112

考试科目代码及名称: 712 数学分析

- 注意: 1、所有答案(含选择题、填空题、判断题、作图题等)一律答在专用答题纸上, 写在试题纸上或其他地点一律不给分。
2、作图题可以在原试题图上作答, 然后将“图”撕下来贴在答题纸上相应位置。
3、考试时限: 3 小时; 总分: 150 分。

考生编号(考生填写)

一、判断题: (正确的打 \checkmark , 错误的打 \times , 每题 5 分, 共 25 分)

(1) 任何定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数都可以表示成一个偶函数和一个奇函数之和. (\times)

(2) 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 连续且 $g(x) \cdot g'(x) \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (\times)$$

(3) 若序列 $\{x_n y_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 必有一序列收敛. (\times)

(4) 若对任意 $\varepsilon > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续. (\checkmark)

(5) 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续且有极大值点 ξ , 则 $f'(\xi) = 0$. (\times)

二、求下列极限值: (每小题 10 分, 共 20 分)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right);$

(2) $x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), n = 0, 1, \dots, \text{其中 } a > 0;$

三、(20 分) 求曲线 $y = 4x^2 - 1$ 在点 $A(\frac{1}{2}, 0)$ 处的切线方程和法线方程。

四、(15 分) 试证明 $x > 0$ 时, $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

五、(20 分) 试求 $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$.

六、(25 分) 设 $f(x)$ 为 $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 的连续函数, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(f(x)) = x$.

证明 $f(x) \equiv x$.

七、(25 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导且非常数函数, $f(a) = f(b) = 0$, 试证明在 $[a, b]$ 中至少存在一点 ζ , 使得

$$|f'(\zeta)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx.$$