2008年中南大学高等代数考研试题

一、填空题（5分，共25分）

1、设α_1=(2,4,2)，α_2=$(-1,-2,-1)$，α_3=(3,5,4)，α_4=(1,4，-1)，$\beta_1,\beta_2\ \beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2\ \alpha_3,\alpha_4$线性表出，则$t$=秩（$\beta_1,\beta_2\ \beta_3,\beta_4$）的取值范围是

2、$W=\left\{\left(x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_{n-1},0\right)\mid x_i\in R,\sum_{i=1}^{k}x_i=0,\sum_{i=k+1}^{n-1}x_i=0\right\}$是$R^n$的子空间，则$W$的正交补的维数是

3、设σ是向量空间F^2上的线性变换，σ：$F^2\to F^2$ $(x_1,x_2)\to(-x_1,x_1)$，则线性变换σ的核（零度）$Ker(\sigma)$和像（值域）$\mathrm{Im}(\sigma)$分别为

4、t取何值时，实矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}\text{与}B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\text{合同？}$$

5、设A是$n(n\ge 2)$阶可逆矩阵，A^*是A伴随矩阵，则$(A^*)^*$与A的关系是

二、(15分）设b,c是实数，$f(x)=x^3+bx+c$，证明：$f(x)$有重根的充要条件是$4b^3+27c^2=0$

三、(15分）设$f(x)$是一个次数大于零的多项式，且$f(0)\ne 0$，A是n阶矩阵且$f(A)=0$，证明：A是可逆矩阵

四、(15分）证明：任一n阶可逆实矩阵A均可分解为一正交矩阵U和一实上三角矩阵R的乘积，即$A=UR$

五、(20分）设$f(x)=x^2-2x+a$

1、证明：存在$a>0$，使得对任一n阶实对称矩阵A，$f(A)$都正定

2、设$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$，若$f(A)$正定，试确定$a$的取值范围

六、(20分）设a,b是实数，求矩阵$A=a^2\begin{bmatrix}1 & b & b & \dots & b\\ b & 1 & b & \dots & b\\ b & b & 1 & \dots & b\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b & b & b & \dots & 1\end{bmatrix}$的最大特征根

七、(20分）设A是n阶实方阵，A'是A的转置矩阵，B和X是n维列向量。证明：方程组$A'AX=A'B$

一定有解

八、（20 分）设 V 是欧式空间，σ 是 V 上的线性变换，τ 是 V 上的变换，且对任意 $\alpha,\beta\in V$ 有 $<\sigma(\alpha),\beta>=<\alpha,\tau(\beta)>$。证明：

1、τ 是 V 上的线性变换

2、σ 的核（零度）$Ker(\sigma)$ 等于 τ 的像（值域）$\mathrm{Im}(\tau)$ 的正交补