

2008 年中南大学数学分析考研试题

一、判断题 (5 分, 共 25 分)

- (1) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致连续, 则 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导
- (2) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内每一点存在有限的左导数, 且 $f(a) = f(b)$, 则至少存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f(x)$ 在 $x = c$ 处的左导数等于 0
- (3) 若序列 $\{x_n + y_n\}$ 和序列 $\{x_n - y_n\}$ 都收敛, 则序列 $\{x_n\}$ 和序列 $\{y_n\}$ 必收敛
- (4) 若函数 $f(x)$ 是在区间 (a, b) 上的连续递增函数, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导且 $f'(x) \geq 0$
- (5) 若序列 x_n 收敛, 则它一定有界

一、计算题 (10 分, 共 20 分)

- (1) 求级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$
- (2) 求积分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

三、(20 分) 在什么条件下三次抛物线 $y = x^3 + px + q$ 与 OX 轴相切? 并求出其切点

四、(15 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有有界的导函数 $f'(x)$, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续

五、(20 分) 若 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

六、(25 分) 设 $f(x)$: (i) 在闭区间 $[a, b]$ 上有二阶连续导数; (ii) 在区间 (a, b) 内有三阶导函数; (iii) 且下面等式成立: $f(a) = f'(a) = 0$ 及 $f(b) = f'(b) = 0$

证明在 (a, b) 内存在一点 c 使得 $f'''(c) = 0$

七、(25 分) 设 $a_k > 0 (k \geq 0)$ 且 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, 定义函数 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - x$

证明

- (i) $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 内的下凸函数
- (ii) $f(x) = 0$ 在 $[0, 1]$ 内有根的充要条件是 $f'(1) > 0$