2009年中南大学高等代数考研试题

一、填空题（25分）

1、 $4x^3-4x^2-5x-1$ 的有理根的集合为

2、 设 n 阶方阵 A 的元素全为1，则 A 的 n 个特征根为　　，A 的最小多项式为

3、 数字矩阵 A 的初等因子是 $\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda+1,\lambda-1,\lambda-1,(\lambda+1)^2$,则 A 的不变因子是

4、 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则常数 l,m 满足　　时向量组 $l\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 线性无关

5、 给定3维欧式空间 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及其度量矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $\beta=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$ 的长度是

二、（25分）

1、（10分）证明：在有理数域上存在任意次数的不可约多项式

2、（15分）设 $f(x),g(x)$ 是数域 P 上两个不全为0的多项式，记 $M=\{f(x)s(x)+g(x)t(x)\mid s(x),t(x)$ 均为 P 上多项式$\}$。证明：M 中次数最低的首1多项式是 $(f(x),g(x))$

三、（25分）

1、（10分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&\dots&x_n\\x_1&x_2-m&\dots&x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_1&x_2&\dots&x_n-m\end{vmatrix}$

2、（15分）设 $A=(a_{ij})$ 为一个 n 阶方阵，且对任何 $i=1,2,\dots,n$，有 $\sum\limits_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|<\left|a_{ij}\right|$

证明 A 的行列式 $\left|A\right|\neq 0$

四、（25分）

1、（12分）证明：对任何矩阵 A 有

$$rank(A^TA)=rank(AA^T)$$

其中 A^T 表示 A 的转置，$rank(B)$ 表示B的秩

2、（13分）设 A 为一个 n 阶方阵，证明：对任何满足 $rank(A)<k\leq n$ 的 k，必存在 n 阶方阵B使得

$$rank(A)+rank(B)=rank(A+B)=k$$

五、（20分）已知二次型 $f(x_1,x_2x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为2

1）求 a 的值

2）求正交变换 $x = Qy$ 把 f 化为标准形

3）求方程 $f(x_1, x_2 x_3) = 0$ 的解

六、（30 分）设线性空间 V 上的线性变换 σ 满足 $\sigma^2 = \sigma$，证明

1）σ 的特征值只能为 0 或 1

2）核 $\sigma^{-1}(0) = \left\{\alpha - \sigma(\alpha) \mid \alpha \in V\right\}$

值域 $\sigma(V) = \left\{\alpha = \sigma(\alpha) \mid \alpha \in V\right\}$

3）$\sigma^{-1}(0)$ 与 $\sigma(V)$ 都是 σ 的不变子空间

4）$V = \sigma^{-1}(0) \oplus \sigma(V)$