

2009 年中南大学数学分析考研试题

一、计算题 (10 分, 共 60 分)

1、计算极限 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$

2、已知 $|y| \leq 1$, 求 $\int_{-1}^1 |x-y| e^x dx$

3、已知 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 条件收敛, 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x [|f(t)| + f(t)] dt}{\int_a^x [|f(t)| - f(t)] dt}$

4、求空间曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 6, z = x^2 + y^2$ 在 $P_0(1,1,2)$ 处的法平面方程

5、计算曲面 $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ 被柱面 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 所截下那一部分的面积

6、计算 $I = \int_{\Sigma} (x-z) dy dz + (y-x) dz dx + (z-y) dx dy$, 其中 Σ 是曲面 $z = 5 - x^2 - y^2$ 上 $z \geq 1$ 的部分, 并取外侧

二、(20 分) 证明 $\sin x$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 但 $\sin x^2$ 不一致连续

三、(15 分) 已知 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处取得极小值。假设 f 在邻域 $U(P_0)$ 内有连续的二阶偏导数, 证明 $f_{xx}(P_0)$

四、(20 分) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n(n-1)}$ 的收敛域; 如果其和函数是 $S(x)$, 证明 $x \in (0, 1)$: 时恒有

$$S(x) + x \ln x + S(1-x) + (1-x) \ln(1-x) = 1$$

五、(25 分) 设 $f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 内是可微函数, 令

$$F(t) = \int_0^t (x+t) f(x) dx$$

如果 $F''(t) \equiv 0$, 求 $f(x)$

六、设 $f_n(x) = (1-x)x^n$, 证明函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛