三 峡 大 学

2006年研究生入学考试试题

考试科目：<u>高 等 代 数</u>

（考生必须将答案写在答题纸上）

一、$f(x),g(x)\in P[x]$，若 $(f(x),g(x))=1$，证明对任意 $h(x)\in P[x]$，$(f(x)+h(x)g(x),g(x))=1$。（12分）

二、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，试问

(1) λ 取何值时，A 与 B 等价？

(2) λ 取何值时，A 与 B 合同？

(3) λ 取何值时，A 与 B 相似？（18分）

三 设 A 为3阶矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $\left|(2A)^{-1}-5A^*\right|$（12分）

四、设矩阵 $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，向量 $b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求方程 $AX=b$ 的通解.（14分）

五、设矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 满足 $A^TA=E,|A|<0$. 计算 $|A+E|$。（12分）

六、证明函数集合 $B=\left\{(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x\,\middle|\,a_0,a_1,a_2\in R.\right\}$ 对于通常的函数加法及数乘函数构成一个线性空间，并求它的维数.（18分）

七、$A\in P^{m\times n}$，$B\in P^{n\times t}$，$AB=0$，证明 $R(A)+R(B)\le n$.（12分）

八、 设$A=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&4&0\\4&0&2\end{pmatrix}$， 试问

(1)求A的特征值及特征向量;

(2) 求正交矩阵Q及对角矩阵D使$Q^{-1}AQ=D$.　　（18 分）

九、$A\in R^{n\times n}$，线性方程组$AX=b$有解. 证明$AX=b$有唯一解的充分必要条件是A^TA为正定矩阵。　　（16 分）

十、A 为正定矩阵，B是实对称矩阵.

(1) 证明存在可逆矩阵V使$V^TAV=E,V^TBV$为对角矩阵.

(2) 证明AB的特征值都是实数.　　（18 分）