

湖北工业大学

二〇〇五年招收硕士学位研究生试卷

试卷代号 308 试卷名称 高等数学

试题内容不得超过画线范围，试题必须打印，图表清晰，标注准确

考生请注意：答题一律做在答题纸上，做在试卷上一律无效。

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，答案写在答题纸上）

1. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ x+a, & x > 0 \end{cases}$ 连续，则 $a =$ _____。

2. 设 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$ ，则 $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____。

3. 微分方程 $y''+3y'+2y=0$ 的通解为 _____。

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ 的收敛区间为 _____。

kaoyan.com

5. 已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ，且 $A = \alpha^T \beta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ，

则 $A^{100} =$ _____。

6. A 为 n 阶幂等阵即 $A^2 = A$ ， E 为 n 阶单位阵，

则秩 $(A) +$ 秩 $(E - A) =$ _____。

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，在每小题给出的 4 个选项中，只有一项符合题要求，把所选项前的字母写在答题纸上）

1. 函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -2$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}$

为 ()。

A. 不存在

B. 0

C. -1

D. -2

湖北工业大学二〇〇五年招收硕士学位研究生试卷

2. 设 $f(x) = \cos x - 1$, $g(x) = \int_0^{x^2} (1+e^t) dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ()。

- A. 高阶无穷小 B. 同阶非等价无穷小
C. 等价无穷小 D. 低阶无穷小

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 是 () 级数。

- A. 条件收敛 B. 发散 C. 绝对收敛 D. 不能确定

4. $\varphi(x) = \int_0^x \frac{3t}{t^2 - t + 1} dt$ 在 $[0,1]$ 上最小值是 ()。

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 0

5. 已知 n 阶行列式 $|A| = 2$, m 阶行列式 $|B| = -2$, 则 $m+n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} =$

- ()。
- A. 0 B. -1 C. 4 D. -4

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, B 是 3×5 阶矩阵, 且 $\text{秩}(B) = 2$, 则 $\text{秩}(AB) =$ ()。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

三、(本题满分 10 分)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{a_1^{1/x} + a_2^{1/x} + \cdots + a_n^{1/x}}{n} \right]^{nx}, \quad (\text{其中 } a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n.)$$

四、(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 满足 $af\left(\frac{1}{x}\right) + b \cdot f(x) = c \cdot x$, 其中 a, b, c 为常数, 且 $|a| \neq |b|$, 求

$f'(x)$ 。

五、(本题满分 10 分)

求定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$ 。

湖北工业大学二〇〇五年招收硕士学位研究生试卷

六、(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 连接点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的直线和曲线 $y = f(x)$ 交于点 $(c, f(c)), a < c < b$, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 δ 使 $f''(\delta) = 0$ 。

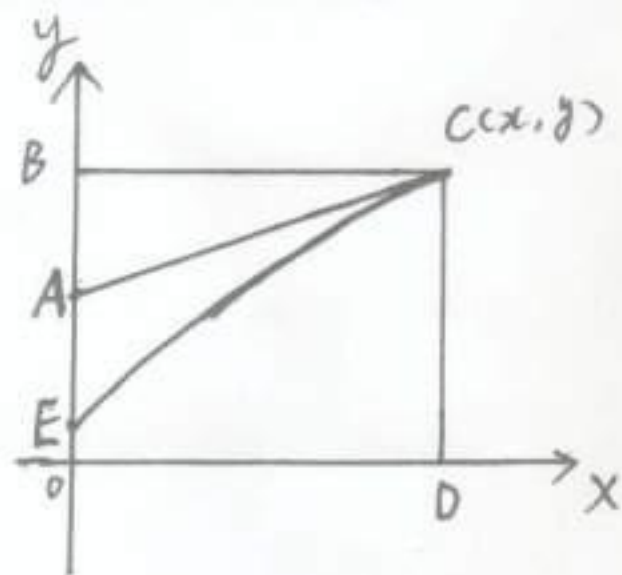
七、(本题满分 10 分)

设曲线 $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 与 x 轴, y 轴所围图形面积被曲线 $y = a \sin x$, $y = b \sin x$ ($a > b > 0$) 三等分, 试确定 a, b 之值。

八、(本题满分 12 分)

设曲线 L 在第一象限 (如下图示), 其上任意一点 C 处的切线与 y 轴的交点为 A , CD 垂直 x 轴, CB 垂直 y 轴, 如果 $\triangle ABC$ 的面积恒等于曲边梯形 $EODC$ 面积的 $\frac{1}{2}$, 求 1. 曲线 L 方程 $y = y(x)$ 所满足的微分方程;

2. 令 $x = e^t$, 求出该微分方程的通解。



九、(本题满分 10 分)

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

且矩阵 X 满足 $AXA + BXB = AXB + BXA + E$, 其中 E 是 3 阶单位阵, 求 X 。

十、(本题满分 12 分)

$$\lambda \text{ 取何值时, 方程组 } \begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases} \text{ 无解? 有惟一解或无穷多解? 并在}$$

有无穷多解时写出方程组的通解。

湖北工业大学二〇〇五年招收硕士学位研究生试卷

十一、(本题满分 8 分)

求矩阵 A 的特征值与特征向量。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

十二、(本题满分 10 分)

设 A 为 n 阶方阵, 且 $|A| = 0$, 记 A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式,

1. 试证向量 $(A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn})^T$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解向量;
2. 如果系数阵满足各行元素之和为零, 且秩 $(A) = n - 1$, 求齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解。