

二〇〇六年招收硕士学位研究生试卷

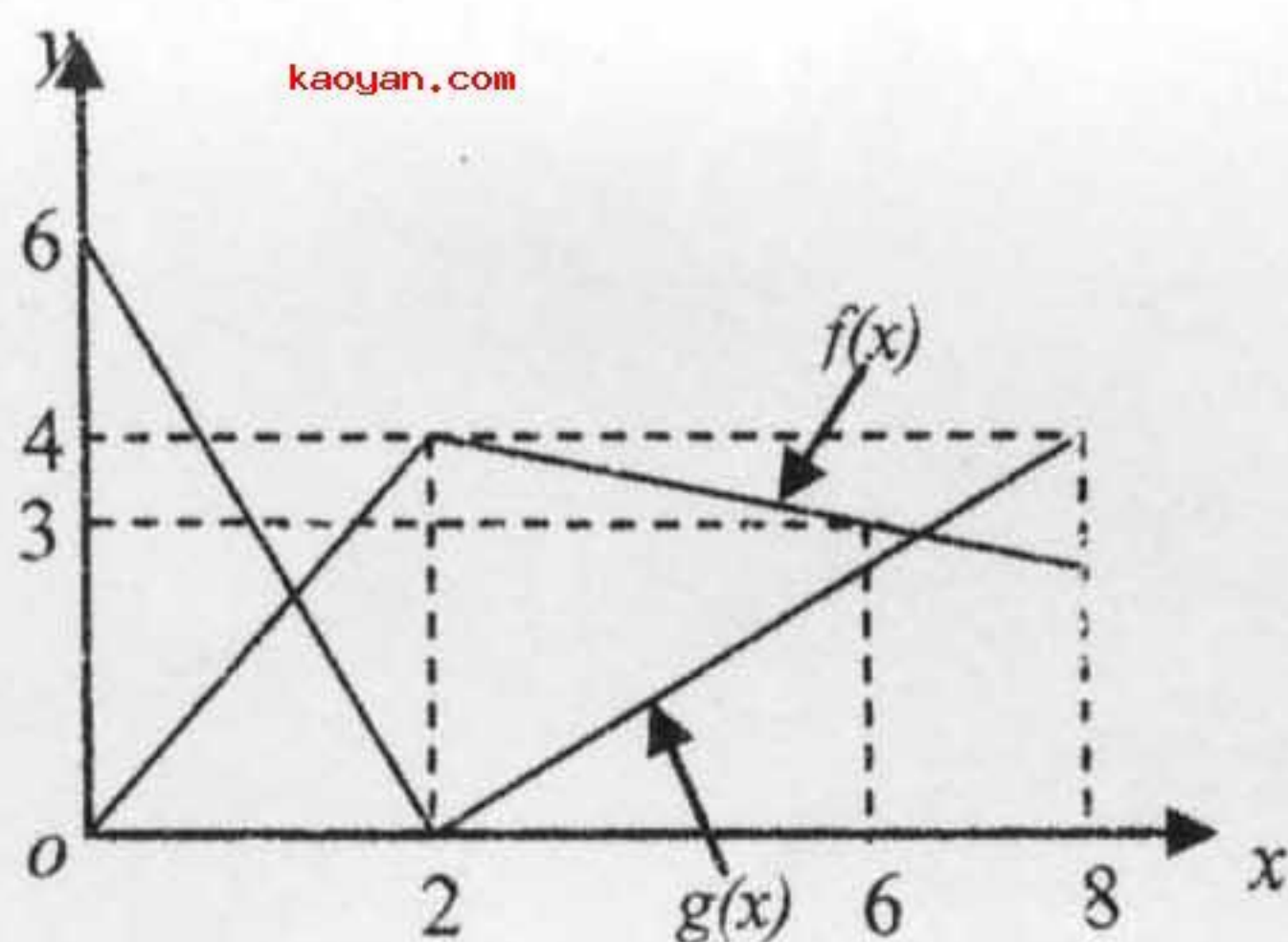
试卷代号 308试卷名称 高等数学

① 试题内容不得超过画线范围，试题必须打印，图表清晰，标注准确

② 考生请注意：答题一律做在答题纸上，做在试卷上一律无效。

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，答案写在答题纸上）

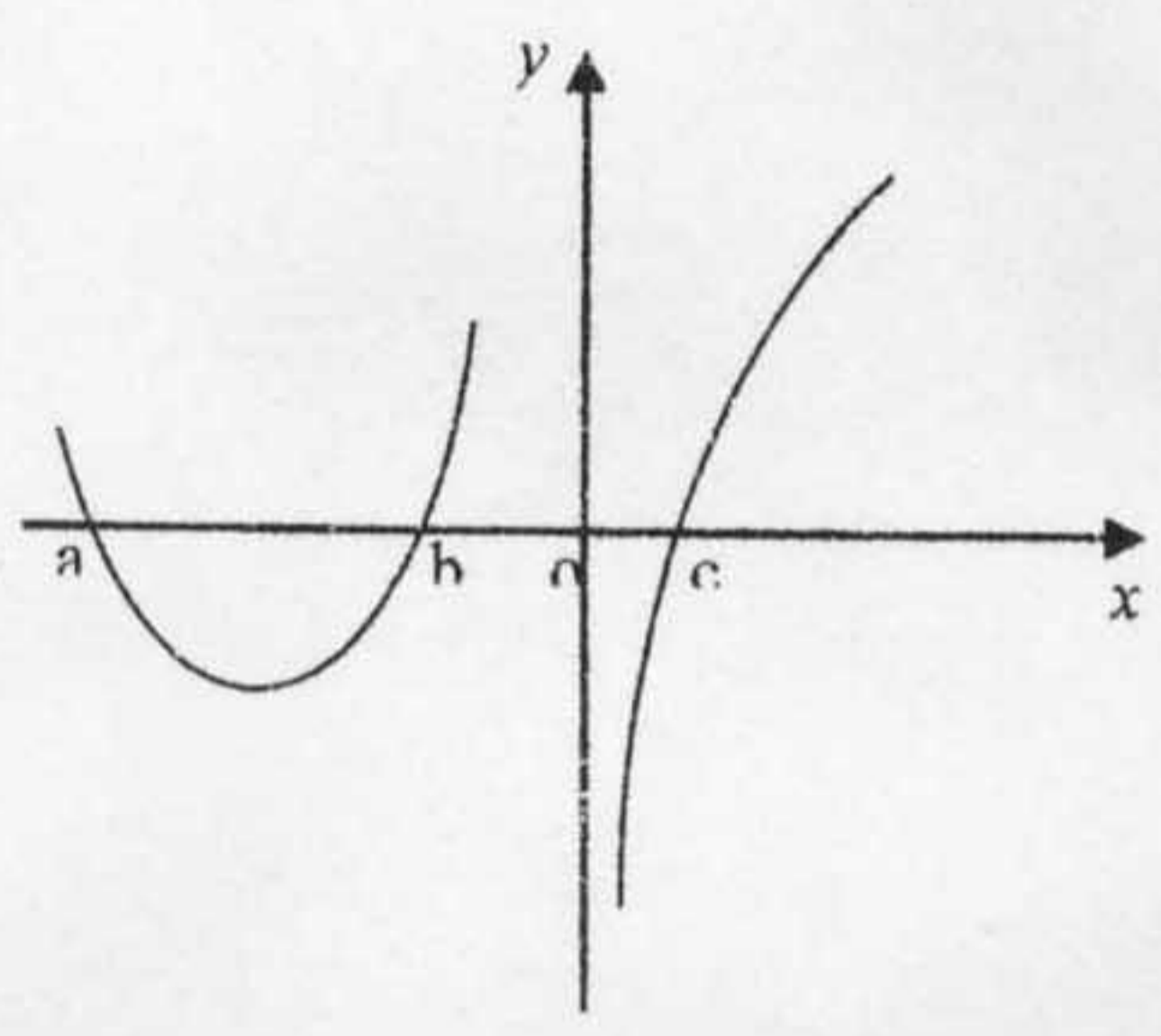
$$1. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1, \\ a, & x \geq 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} b, & x < 0, \\ x+3, & x \geq 0. \end{cases}$$

若 $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，则有 $a = (\quad)$, $b = (\quad)$.2. 如图， $f(x)$, $g(x)$ 是两个逐段线性的连续函数，设 $u(x) = f[g(x)]$ ，则 $u'(1)$ 的值为(3. 微分方程 $y'' - 7y' + 6y = 0$ 的通解为()。4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} x^{2n}$ 的和函数为()。5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = AB^{-1}$, 则矩阵 C^{-1} 中, 第 3 行第 2

的元素是()。

有一项符合题的要求，把所选项前的字母写在答题纸上)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有 ()
- (A) 一个极小值点和两个极大值点; (B) 两个极小值点和一个极大值点;
- (C) 两个极小值点和两个极大值点; (D) 三个极小值点和一个极大值点.



2. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, x^4 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小量, 而 $x \sin x^n$ 是比 $1 - \cos x$ 高阶的无穷小量, 则正整数 n 等于().
- (A) 1 (B) 3 (C) 2 (D) 4

3. 曲线 $y = x(3-x)(x-2)$ 与 x 轴所围成的面积可表为().

- (A) $-\int_0^3 x(3-x)(x-2)dx$; (B) $\int_0^3 x(3-x)(x-2)dx$;
- (C) $-\int_0^2 x(3-x)(x-2)dx + \int_2^3 x(3-x)(x-2)dx$;
- (D) $\int_0^2 x(3-x)(x-2)dx - \int_2^3 x(3-x)(x-2)dx$.

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{a}{n})$ (常数 $a > 0$) 是() 级数。

- (A) 条件收敛 (B) 发散 (C) 绝对收敛 (D) 不能确定

5. 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1} = ()$.

- (A) $\frac{1}{n} A$ (B) $(-1)^{n-1} \frac{1}{n} A$ (C) $\frac{1}{n} A^{-1}$ (D) $(-1)^{n+1} A^{-1}$

湖北工业大学二〇〇六年招收硕士学位研究生试卷

6. 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则方程组 $Ax = b$ 的通解必是().

- (A). $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ (B). $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$
 (C). $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ (D). $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$

三、(满分 10 分)

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 又

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(0), & x = 0 \\ \frac{e^x}{x} f(x), & x \neq 0 \end{cases}$$

求: $\varphi'(x)$

四、(满分 10 分, 每小题 5 分)

(1) 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 $\int xf'(x)dx$;

(2) 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $\int_0^\pi f(x \sin x) \sin x dx = 1$, 求 $\int_0^\pi f(x \sin x) x \cos x dx$.

五、(满分 10 分)

某公园有一高 a (m) 的雕像, 放置在高为 b (m) 的基座上, 观赏者高为 h (m) ($h < b$), 问观赏者离基座底部多远时, 才能使其视线对塑像张成的角最大?

六、(满分 10 分)

设在 $[0, a]$ 上, $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取得最大值, 证明:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

七、(本题满分 12 分, 每小题 6 分)

(1) 求 $u(x, y, z) = x^y y^z z^x$ 的全微分。

(2) 计算 $I = \iint_D \sin y^2 dx dy$ 其中 D 为由 $x=1$, $y=x-1$ 及 $y=2$ 所围成的区域。

八、(本题满分 10 分)

某厂房容积为 $45 \times 15 \times 6$ 米³, 经测定, 空气中含有 0.2% 的 CO_2 , 开动通风设备, 以 360 米³/秒的速度输入含有 0.05% 的 CO_2 的新鲜空气, 同时又排出同等数量的室内空气, 求 30 分钟后室内所含 CO_2 的百分比。(当 $x \geq 160$ 时 $e^{-x} \approx 0$)

湖北工业大学二〇〇六年招收硕士学位研究生试卷

九、(本题满分 10 分)

已知 A 、 B 为 3 阶方阵且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$.

(1) 证明矩阵 $A - 2E$ 可逆;

(2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .

十、(本题满分 10 分)

已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, 0)^T$, $\beta = (3, 10, b, 4)^T$, 问:

(1) b 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 并写出表达式.

(2) b 为何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

十一、(本题满分 10 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, 求 x 及 A 的特征向量.

十二、(本题满分 10 分, 每小题 5 分)

(1) 设 A 、 B 都是 n 阶方阵, 且满足 $AB = 0$, 证明 $R(A) + R(B) \leq n$.

(2) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & x \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, 三阶方阵 $B \neq 0$, 且满足 $AB = 0$, 计算 x 的值及矩阵 B 的秩 $R(B)$.