

# 湖北工业大学

## 二〇〇六年招收硕士学位研究生试卷

试卷代号 408 试卷名称 近世代数

① 试题内容不得超过画线范围，试题必须打印，图表清晰，标注准确

② 考生请注意：答题一律做在答题纸上，做在试卷上一律无效。

一、(满分 15 分)

设  $G = (Z, +)$ ,  $Z$  为整数集, 对  $G$  定义乘法 “ $\circ$ ”,

$$a \circ b = a + b - 2,$$

证明:  $(G, \circ)$  构成一个群。

二、(满分 15 分)

设  $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid A \in R^{2 \times 2}, |A| \neq 0 \right\}$ ,  $G$  对通常矩阵乘法构成群, 映射

$$\varphi: G \rightarrow R^* \\ A \rightarrow |A| \quad (|A| \text{ 为方阵 } A \text{ 的行列式})$$

证明:  $\varphi$  是群  $G$  到  $(R^*, \cdot)$ ,  $R^* = R - \{0\}$  的一个同态映射。

三、(满分 15 分)

设  $N$  为群  $G$  的一个不变子群,

证明: 1)  $aNa^{-1} = N$

2)  $(aN)(bN) = abN$

四、(满分 20 分)

集合  $Z[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in Z\}$ ,  $Z$  整数集。

证明:  $Z[\sqrt{2}]$  是实数环  $R$  对通常数乘与加法运算的子环。

## 湖北工业大学二〇〇六年招收硕士学位研究生试卷

五、(满分 20 分)

设  $A = (Z)$ , 是整数环  $Z$  上 3 阶方阵环;  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in Z \right\}$ ,

1. 证明:  $B$  是  $A$  的一个子环。
2. 问:  $B$  是不是  $A$  的理想?
3. 求:  $B^2, B^3$ 。

六、(满分 15 分)

证明: 两个理想的交集, 还是一个理想。

七、(满分 15 分)

设  $F$  是域, 问多项式环  $F[x]$  的主理想  $(x^2)$  含有哪些元?

商环  $F[x]/(x^2)$  含有哪些元?

八、(满分 20 分)

设  $A$  是一个环, 命  $\bar{A} = \{ (m, a) \mid m \in Z, a \in A \}$  为  $Z \times A$  上的环,  $\bar{A}$  定义加法与乘法如下:

$$(m, a) + (n, b) = (m + n, a + b)$$

$$(m, a) \cdot (n, b) = (mn, na + mb + ab)$$

- 证明: 1.  $\bar{A}$  是一个有单位元的环;  
2.  $\bar{A}$  是含有子环与  $A$  同构。

九、(满分 15 分)

设  $R$  是一切形如  $\frac{m}{2^k}$  ( $m$  是任意整数,  $k$  是非负整数) 的有理数所成集合, 证

明:  $(R, +, \times)$  作为一个有单位元的整环,  $R$  的哪些元是可逆元? 哪些元是既约元?