湖北工業大學

二〇〇八年招收硕士学位研究生试卷

试卷代号 608　　　试卷名称 高等数学

①试题内容不得超过画线范围，试题必须打印，图表清晰，标注准确

②考生请注意：答案一律做在答题纸上，做在试卷上一律无效。

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，答案写在答题纸上）

1.设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}+\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________, $b=$________.

2.设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$________________.

3.微分方程 $y''-4y'+7y=0$ 的通解为________________.

4.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛区间为________________.

5.设 A 为 4×3 矩阵，且 A 的秩 $R(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&3\\-1&0&6\end{pmatrix}$，则 $R(AB)=$________.

6.设 4 阶方阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A|=2,|B|=4$，则行列式 $|A+B|=$________

二、选择题.(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，在每小题给出的 4 个选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母写在答题纸上)

1.设函数在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如图 1 所示，则导函数 $f'(x)$ 的图形为图中所示的四个图形中的哪一个？（ ）

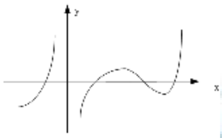
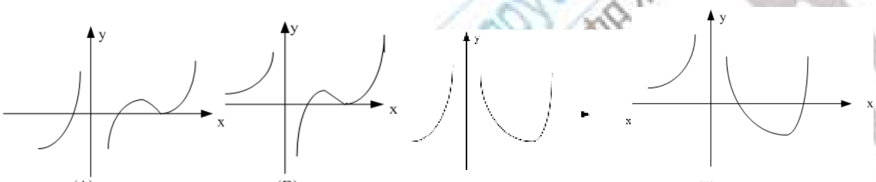


图1



(A) (B) (C) (D)

2.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ ）.

A.极限不存在　　B.极限存在，但不连续　　C.连续，但不可导　　D.可导

3.设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$，则 $F(x)$ （ ）.

A.为正常数　　B.为负常数　　C.恒为零　　D.不为常数

4.级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln(1+\dfrac{a}{n^2})$，（$a>0$, 为常数）是（ ）.

A.条件收敛　B.绝对收敛　C.发散　D.是否收敛与 a 有关，不确定

5.设 n 阶方阵 A,B,C 满足关系式 $ABC=E$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，则必有（ ）.

A. $ACB=E$　B. $CBA=E$　C. $BAC=E$　D. $BCA=E$

6.设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，则三条直线 $a_i x+b_i y+c_i=0$，$(i=1,2,3)$，

（其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1,2,3$）交于一点的充要条件是（ ）.

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关　　B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

C.秩 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$秩 $R(\alpha_1,\alpha_2)$　　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，α_1,α_2 线性无关

三.（本题满分 10 分）

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程。

四.（本题满分 10 分）

求两椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ 和 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 的公共部分的面积.

五.（本题满分 12 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1$，$g'(0)=0$.

（1） 若 $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}+c$，问 c 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（2） 求 $f'(x)$.

六.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f(a)f(b)>0$，$f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$，试证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$

七.（本题满分 10 分）

求摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$，$(0\le t\le 2\pi)$ 的一拱与 x 轴所围成的图形绕 $y=2a$ 旋转而成的旋转体的体积。

八.（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

九.（本题满分 10 分）

设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\a\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}5\\5\\2\\0\end{pmatrix}$$

（1） 当 a 取何值时，该向量组的秩为 3?

（2） 当 a 取上述值时，求出该向量组的一个极大线性无关组，并且将其他向量用该组线性表示.

十.（本题满分 10 分）

设四元线性齐次方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$$

又已知某线性齐次方程组（II）的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$.

（1）求线性方程组（I）的基础解系.

（2）线性方程组（I）和（II）是否有非零公共解？若有求出所有非零公共解.若没有则说明理由.

十一.（本题满分 10 分）

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 1，1，0，与特征值 0 对应的特征向量为 $p_3=(1,0,-1)^T$，求 A.

十二.（本题满分 10 分）

设 A 为 n 阶幂等阵，$A^2=A$,证明:秩 $R(A)+$ 秩 $R(E-A)=n$.