湖北工業大學

二〇〇九年招收硕士学位研究生试卷

试卷代号 360 　　试卷名称 高等数学 (A)

①试题内容不得超过画线范围，试题必须打印，图表清晰，标注准确。

②考生请注意：答题一律做在答题纸上，做在试卷上一律无效。

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，答案写在答题纸上）

1、设 f(x)=$\begin{cases} e^{bx}, & x \le 0 \\ x+a, & x > 0 \end{cases}$ 连续，则 a=__________

2、若 $f'(0)$ 存在且 f(0)=0，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ =__________

3、微分方程 $y''-4y'+5y=0$ 的通解为__________

4、幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛区间为__________

5、设四阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随矩阵 A^* 的秩为__________

6、在五阶行列式中，项 $a_{32}a_{55}a_{14}a_{21}a_{43}$ 的符号取__________

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，在每小题给出的 4 个选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母写在答题纸上）

1、直线 l 与 x 轴平行且与曲线 y=x$-e^x$ 相切，则切点为（　　）

A.（1，1）　B（-1，1）　C（0，1）　D（0，-1）

2、函数 f(x)有二阶连续导数，且 f(0)=0, $f'(0)=1, f''(0)=-2,$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$ 为（　　）

A.不存在　B.0　C.-1　D.-2

3、$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，其中 f(x)为连续奇函数，则 F(x)是（　　）

A.奇函数　B.偶函数　C.非奇非偶　D.既是奇函数又是偶函数

4、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^2$ 在 x=-1 处收敛，则此级数在 x=2 处（　　）

A.条件收敛　B.绝对收敛　C.发散　D.收敛性不能确定

5、设 A=$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$，其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0, (i=1,2,\cdots,n)$，则矩阵 A 的秩

r(A)=(　　)

A.0　B.1　C.n-1　D.n

6、设 A，B 都是 n 阶非零矩阵，且 AB=0，则 A 和 B 的秩（　　）

A.必有一个等于零　　B.都小于 n

C.一个小于 n, 一个等于 n　　D.都等于 n

三.（本题满分 10 分）

若函数 $f(x)$ 在 a 点可导，且 $f(a)>0$，求 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$

四.（本题满分 10 分）

设函数 $y=x^2$，$0\le x\le 1$，问：

（1）t 取何值时（图 1)中阴影部分面积 S_1 与 S_2 之和最小？

（2）t 取何值时 $S=S_1+S_2$ 最大？

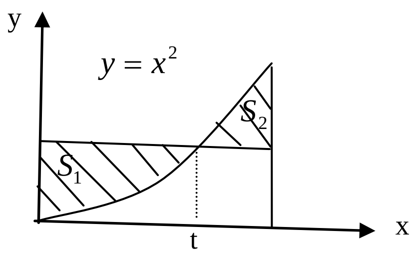

图 1

五.（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $xf''(x)+9xe^{f'(x)}[f'(x)]^2=1-e^x$，且 $f''(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

（1）若 $f(x)$ 在点 $x=a(a\neq 0)$ 有一个极值，证明这个极值必为极大值；

（2）若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 有一个极值，问它是极大值还是极小值.

六.（本题满分 10 分）

设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续，证明：

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$$

七.（本题满分 10 分）

椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转而成椭球体上沿其长轴方向穿心打一圆孔，使剩下部分体积恰好等于椭球体体积一半，试求该圆孔底面直径。

八.（本题满分 10 分）

设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足 $\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(x)dt-x\int_0^x\varphi(t)dt$，求 $\varphi(x)$

九、（本题满分 10 分）

确定向量 $\beta_3=(2,a,b)$，使向量组 $\beta_1=(1,1,0)$，$\beta_2=(1,1,1)$，β_3 与向量组 $\alpha_1=(0,1,1),\alpha_2=(1,2,1),\alpha_3=(1,0,-1)$ 的秩相同，且 β_3 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示.

十、（本题满分 10 分）

已知三阶矩阵 B$\neq 0$，且 B 的每一个列向量都是以下方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

（1） 求 λ 的值

（2） 证明：$|B|$=0

十一、（本题满分 10 分）

设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 1,2,3，矩阵 A 的属于特征值 1，2 的特征向量分别是 $\alpha_1 = (-1,-1,1)^T, \alpha_2 = (1,-2,-1)^T$.

（1） 求 A 属于 3 的特征向量；

（2） 求矩阵 A.

十二、（本题满分 10 分）

A 为 n 阶矩阵，证明：R（A）+R（A+E）≥n.

参考答案

一、填空题（4 分×6＝24 分）

1. 1　　2. $f'(0)$　　3. $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$　　4. [2, 4]　　5. 0　　6. 负号

二. 选择题（4 分×6＝24 分）

1. D　2. C　3. B　4. B　5. B　6. B

三.（10 分）

解：令 $y=\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$，则

$$\ln y=n\cdot\left[\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)\right] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\ 2\text{ 分}$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)}{1/n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln f(a+\frac{1}{x})-\ln f(a)}{1/x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$\underline{\underline{t=\frac{1}{x}}}\lim_{t\to\infty}\frac{\ln f(a+t)-\ln f(a)}{t}=[\ln f(t)]'|_{t=a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{f(t)}f'(t)|_{t=a}=\frac{f'(a)}{f(a)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8\text{ 分}$$

故　　原极限＝$\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln y}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$10 分

四.（10 分）

解：$S_1=t^3-\int_0^t x^2dx=\dfrac{2}{3}t^3$　　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$2 分

$S_2=\int_t^1 x^2dx-t^2(1-t)=\dfrac{2}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4 分

$S=S(t)=S_1+S_2=\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3}$，$(0\le t\le 1)$

则 $s'=4t^2-2t$　　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$6 分

令 $s'=0$，得 $t=\dfrac{1}{2}$　　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$8 分

比较 $S(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$，$S(0)=\dfrac{1}{3}$，$S(1)=\dfrac{2}{3}$ 大小可知：

当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，阴影部分面积 S_1 与 S_2 之和最小；$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$9 分

当$t=1$时，阴影部分面积S_1与S_2之和最大. ……………………………………………………10分

五、（12 分）

解：（1）若 a 为 f(x) 的极值点，$a\neq 0,$而$f'(x)$存在，则由极值必要条件定理知

$f'(a)=0$ ………………………………………………………………2 分

故$af''(a)+9ae^{f'(a)}[f'(a)]^2=1-e^a$,即$af''(a)=1-e^a(a\neq 0),f''(a)=\dfrac{1-e^a}{a}$ ………4 分

则无论 a＞0 或 a＜0, 都有 $f''(a)<0,$故$f(x)$在a点为极大值 ……………………………6 分

（2）若 f(x) 在 X=0 点有极值，

由 $f''(x)$在$x=0$点连续，知$f'(x)$在$x=0$点连续 ……………………………………………7 分

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{1}=-1$……………………………………………………………8 分

所以在方程 $f''(x)+9e^{f'(x)}[f'(x)]^2=\dfrac{1-e^x}{x}$中令$x\to 0$

得 $f''(0)+9e^{f'(x)}[f'(0)]^2=-1$……………………………………………………………10 分

由极值必要条件定理知 $f'(0)=0,$故$f''(0)=-1<0$

因此$x=0$是$f(x)$的极大值点 ……………………………………………………………12 分

六.（10 分）

证明：对于任意数λ，显然$[f(x)+\lambda g(x)]^2\geq 0$，故……………………………………………2 分

$\int_a^b[f(x)+\lambda g(x)]^2dx=\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx+\lambda\int_a^b 2f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\geq 0$ ……………. 4 分

上式是一个关于λ的一元二次不等式，其中$\int_a^b g^2(x)dx\geq 0$，为使不等式成立，必满足. 6 分

$\left[\int_a^b 2f(x)g(x)dx\right]^2-4\int_a^b g^2(x)dx\int_a^b f^2(x)dx\leq 0$ ……………………………………………10 分

即

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b g^2(x)dx\int_a^b f^2(x)dx$$

七.（10 分）

解：椭球体体积

$$V=2\int_0^2 \pi(1-\frac{y^2}{4})dy=\frac{8}{3}\pi$$ ………………………………………………………2 分

设圆孔底面半径为 r，则所打圆孔的体积为：

$$V'=2\iint_{x^2+z^2\le r^2} ydxdz$$ ………………………………………………………4 分

$$=2\iint_{x^2+z^2\le r^2} 2\sqrt{1-x^2-z^2}dxdz$$ ………………………………………………………6 分

在极坐标系中，令 $x=\rho\cos\theta$， $z=\rho\sin\theta$，则 $0\le\theta\le 2\pi$， $0\le\rho\le r$，得

$$V'=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r 2\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho$$

$$=-\frac{8}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\pi$$ ………………………………………………………9 分

由 $V'=\frac{4}{3}\pi$ 得 $r\approx 0.608$，从而直径 $d\approx 1.216$ ………………………………………………10 分

八、（10 分）

由 $\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(x)dt-x\int_0^x\varphi(t)dt$ 得

$$\varphi'(x)=e^x+x\varphi(x)-[\int_0^x\varphi(t)dt+x\varphi(x)]=e^x-\int_0^x\varphi(t)dt$$

$\varphi''(x)=e^x-\varphi(x)$ 即 $\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x$ ………………………………………………………2 分

对于微分方程 $\varphi''(x)+\varphi(x)=0$，其特征方程 $\lambda^{2.}+1=0$ 得特征根为 $\lambda=\pm i$

故其通解为 $y=c_1\cos x-c_2\sin x$ ………………………………………………………4 分

设 $y^*=ae^x$ 是 $\varphi''(x)+\varphi(x)$ 的一个特解，则 $(y^*)''+y^*=e^x$

即 $ae^x+ae^x=e^x$，从而得 $a=\frac{1}{2}$，故 $\varphi''(x)+\varphi(x)$ 的通解为

$\varphi(x)=c_1\cos x-c_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$ ………………………………………………………6 分

由于 $\varphi(0)=e^0+0-0=1$，故 $\varphi(0)=c_1+\frac{1}{2}=1$ 得 $c_1=\frac{1}{2}$ ……………………………8 分

由于$\varphi'(0)=e^0-\varphi(0)=0$,而$\varphi'(x)=-c_1\sin x-c_2\cos x+\frac{1}{2}e^x$

故$\varphi'(0)=-c_2+\frac{1}{2}=0$,得$c_2=\frac{1}{2}$ ………………………………………………………10 分

因此$\varphi(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}e^x$

九、(10 分)

解:设$A=(\alpha_1,\alpha_2.\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2.\beta_3)$,则

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\text{且}\,\mathrm{R(A)}=2$$ ………………………………………………………………2 分

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&\mathrm{a}\\0&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&b\\0&0&a-2\end{pmatrix}$$ ………………………………………………………4 分

因为$R(B)=R(A)=2$,故$a-2=0$,即$a=2$ ………………………………………………………6 分

又因为β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,故设$\beta_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ ………………………8 分

即$\begin{pmatrix}2\\2\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_2+k_3\\k_1+2k_2\\k_1+k_2-k_3\end{pmatrix}$得 b=0

因此$\beta_3=(2,2,0)$ ……………………………………………………………………………10 分

十、(10 分)

(1)设β_1,β_2,β_3是B的向量,则$\mathrm{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,设方程组的系数矩阵为

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{pmatrix}$$

由于β_1,β_2,β_3是$\mathrm{Ax}=0$的解,且β_1,β_2,β_3不全为零,所以$\mathrm{A}x=0$有非零解

…………………………………………………………………………2 分

从而$|\mathrm{A}|=0$,即$\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$得$\lambda=1$ ……………………………………………………5 分

(2)因为 A,B 是三阶方阵,且 AB=$A(\beta_1\beta_2\beta_3)=0$,故

$R(A)+R(B)\le 3$即$R(A)=2$,故R(B)≤ 1<3…………………………7 分

所以$|B|=0$ ……………………………………………………………………10 分

十一、（10 分）

解：（1）设 A 属于 3 的特征向量$\alpha_3=(a,b,c)^T$,则

由于实对称矩阵不同特征值的特征向量必正交，故

$[\alpha_1，\alpha_3]=0,[\alpha_2，\alpha_3]=0$ ……………………………………………………………2 分

即$\begin{cases}-a-b+c=0\\ a-2b-c=0\end{cases}$ ……………………………………………………………………4 分

得$\begin{cases}b=0\\ a=c\end{cases}$

取 c=1, 则 a=1, b=0, 即$\alpha_3=(1,0,1)^T$ ………………………………………………………5 分

（2）设$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$|B|\neq 0$,故$\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3$线性无关 ……………………7 分

由于三阶矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量，故

$P^{-1}AP=\wedge$，其中$P=(\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$,$\wedge=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$…………9 分

所以$A=P\wedge P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}$…………………………………………………10 分

十二、（10 分）

解：因为

$n=R(E)=R(E+A-A)$ 2分

$\leq R(E+A)+R(-A)$ 8分

$=R(E+A)+R(A)$ 10分

故$R(A)+R(E+A)\geq n$