

# 武汉科技大学

## 2004 年硕士研究生入学试题

课程名称：**高等代数**

页数：3页（总页数）

说明：1. 可使用的工具：计算器（ ）

2. 答题内容写在答题纸上，写在试题纸或草稿纸上无效

### 一、填空（共 5 小题 30 分）

1. 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  的相似标准形为\_\_\_\_\_

2. 多项式  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$  在有理数域上一定（填：可约、不可约）\_\_\_\_\_。

3. 如果  $\beta$  可被向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表出，则：

秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  \_\_\_\_\_ 秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta)$ 。

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$  是正定矩阵，则  $k$  \_\_\_\_\_。

5. 已知四阶方阵  $A$  的特征值为 2, 0, 0, 4。  $B$  与  $A$  相似，则  $B$  的特征多项式  $f_B(\lambda) =$ \_\_\_\_\_。

### 二、单项选择题（共 5 小题 30 分）

1. 设  $A$  为  $n$  阶正交阵 ( $n \geq 2$ )，则  $A$  的特征值不可能是\_\_\_\_\_

- A) 1                      B)  $i$   
C) -1                     D) 2

2.  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵，其秩  $= r < n$ ，则方程组  $Ax = b$  \_\_\_\_\_

- A) 有无穷多个解              B) 有唯一解  
C) 无解                        D) 不一定有解

3.  $A$  为  $n$  阶实对称阵, 则  $A$  正定的必要而非充分的条件是\_\_\_\_\_

- A)  $A$  的行列式大于 0
- B) 存在  $n$  阶可逆方阵  $C$  使得  $A = C^T C$
- C)  $A$  与单位阵合同
- D)  $A$  的特征值全大于 0。

4. 已知  $n$  阶方阵  $A$  与对角阵相似, 则\_\_\_\_\_

- A) 秩( $A$ ) =  $n$
- B)  $A$  有  $n$  个不同的特征向量;
- C)  $A = A^T$
- D)  $A$  有  $n$  个不同的特征值。

5.  $A$ 、 $B$  都为  $n$  阶方阵,  $AB = 0$ , 则\_\_\_\_\_

- A)  $A = 0$  或  $B = 0$
- B)  $R(A) = 0$  或  $R(B) = 0$
- C)  $|A| = 0$  或  $|B| = 0$
- D)  $tr(A) = 0$  或  $tr(B) = 0$

三、(10 分)

$$\text{计算 } n \text{ 阶行列式 } d = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \Lambda & b \\ b & a_2 & b & \Lambda & b \\ b & b & a_3 & \Lambda & b \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b & b & b & \Lambda & a_n \end{vmatrix}$$

四、(10 分)  $V = \{a + bt + ct^2 \mid a, b, c \in R^1\}$ ,

求由基

$$f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = 1 + t^2,$$

到基

$$g_1(t) = -t, g_2(t) = 1 + t, g_3(t) = t^2$$

的过渡矩阵。

五、(15 分)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ ,

求一个正交替换使得二次型  $f$  为标准形。并判断其正定性。

六、(15分)  $A$ 、 $B$  为可逆方阵，求  $X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

七、(40分)

1.  $A$  为  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换，且  $f(x) = x^3 + x^2 - 2$  为其零化多项式，  
求证： $A$  可逆；并用  $A$  的一个多项式表示  $A^{-1}$ 。

2.  $A$ 、 $B$  为  $n$  阶实方阵，若  $A$  正定，且  $B'AB = 0$ ，求证： $B = 0$

3.  $A$  为  $m \times n$  阶方阵， $b$  为一个  $n$  维列向量。已知方程  $Ax = b$  有唯一解，求证  $A^T A$  的主子式全部大于 0。

4. 已知三阶方阵  $A$  的特征值为 1、1、2， $V_1 = \{x \in R^3 \mid (A - E)^2 x = 0\}$ ，

$$V_2 = \{x \in R^3 \mid (A - 2E)x = 0\}$$

求证：对任意  $\eta \in R^3$ ，都存在  $\alpha \in V_1$  与  $\beta \in V_2$  使得

$$\eta = \alpha + \beta。$$