武汉科技大学

2005年硕士研究生入学考试试题
（参考答案）

课程名称：矿 业 运 筹 学

一. 某矿计划开发 A、B 两个不同矿点，开发矿点需要一定的设备、电力和劳动力。该矿可用设备有 360 台套、可用电力资源 200 万 kwh、可分配人员 300 人。已知两矿点每万吨生产能力的设备、电力、劳动力用量和产品能获得的利润如下表。要求安排最优的开发计划（每矿点的生产规模），使矿山总利润最大。试建立该问题的线性规划模型。（15 分）

矿　　点		A	B	资源限制量
资源	设备（台套）	9	4	360
	电力（万 kwh）	4	5	200
	劳动力（人）	3	10	300
产品获利（万元/万吨）		70	120	

解：设 A、B 两矿点的生产规模分别为 x_1、x_2 万吨，矿山总利润为 Z，则该问题的线性规划模型为：

$$
\begin{aligned}
& MaxZ = 70x_1 + 120x_2 \\
& s.t. \quad 9x_1 + 4x_2 \le 360 \\
& \qquad\quad 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\
& \qquad\quad 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\
& \qquad\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

二. 若 $X^{(1)}$ 及 $X^{(2)}$ 同时为某线性规划问题的最优解，证明在这两点连线上的所有点也是该线性规划问题的最优解。（20 分）

证明：设 $X^{(1)}$ 及 $X^{(2)}$ 是 $\min\{CX | AX = b, X \ge 0\}$ 的最优解，

即 $AX^{(1)} = b$， $AX^{(2)} = b$； $CX^{(1)} = z^*$， $CX^{(2)} = z^*$

则 $X = \alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} \ge 0$ （α_1，$\alpha_2 \ge 0$ 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$）

$$\text{有 } AX = A\alpha_1 X^{(1)} + A\alpha_2 X^{(2)}$$
$$= \alpha_1 AX^{(1)} + \alpha_2 AX^{(2)}$$
$$= \alpha_1 b + \alpha_2 b = b$$
$$CX = C\alpha_1 X^{(1)} + C\alpha_2 X^{(2)}$$
$$= \alpha_1 CX^{(1)} + \alpha_2 CX^{(2)}$$
$$= \alpha_1 z^* + \alpha_2 z^* = z^*$$

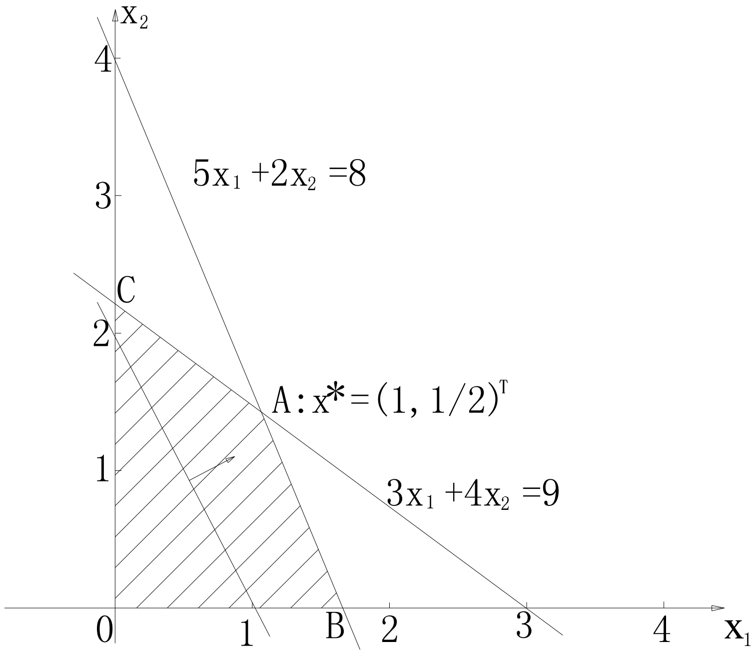
所以 $X^{(1)}$ 及 $X^{(2)}$ 的连线上所有点 $X = \alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} \geq 0$ 也是该线性规划问题的最优解。

三. 求解 $MaxZ = 10x_1 + 5x_2$

$$s.t.\quad 3x_1 + 4x_2 \leq 9$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

说明当目标函数中变量的系数怎样改变时，使可行域上的每一个顶点都有可能成为最优解。（20 分）

解：用图解法求解；



∴ $X^*=(1, 1/2)^T$；$Z^*=35/2$

或用单纯形法求解；

原模型标准化为：

$$\begin{aligned} \min z &= -10x_1 - 5x_2 \\ s.t.\quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

则求解过程为：

C_j		-10	-5	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	4	1	0	9
0	x_4	5^*	2	0	1	8
σ_j		-10	-5	0	0	0
0	x3	0	14/5	1	-3/5	24/5
-10	x1	1	2/5	0	1/5	8/5
σ_j		0	-1	0	2	16
-5	x2	0	1	5/14	-3/14	3/2
-10	x1	1	0	-1/7	2/7	1
σ_j		0	0	5/14	25/14	35/2

∴ $X^*=(1,1/2)^T$；$Z^*=35/2$

设目标函数为：$MaxZ = C_1x_1 + C_2x_2$

由图解法可知：当 $\frac{3}{4} \le \frac{C_1}{C_2} \le \frac{5}{2}$ 时，顶点 A 为最优点；

当 $\frac{C_1}{C_2} \ge \frac{5}{2}$ 时，顶点 B 为最优点；

当 $\frac{C_1}{C_2} \le \frac{3}{4}$ 时，顶点 C 为最优点；

当 $\frac{C_1}{C_2} \le 0$ 时，顶点 O 为最优点。

四. 已知线性规划问题 $\quad MaxZ = 3x_1 + 2x_2$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 14 \\
& x_1 - x_2 \le 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

（1） 写出它的对偶问题； （ 5 分）

（2） 应用对偶理论证明原问题和对偶问题都存在最优解。 （10 分）

解：（1）原问题的对偶问题为：$\min w = 4y_1 + 14y_2$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & -y_1 + 3y_2 + y_3 \geqslant 3 \\
& 2y_1 + 2y_2 - y_3 \geqslant 2 \\
& y_1, y_2, y_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

很显然：（0，0）^{T}是原问题的可行解，（0，1，0）^{T}是其对偶问题的可行解，根据对偶理论证明原问题和对偶问题都存在最优解。

五. 某极小化指派问题的系数矩阵为：

$$
C = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 9 \end{bmatrix}
$$

求其最优指派。 （20 分）

解：用匈牙利算法求解为：

$$
C = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 9 \end{bmatrix}\begin{matrix} -2 \\ -4 \\ -11 \\ -4 \end{matrix}；\text{对原矩阵变换后：}\ C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 13 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 5 \end{bmatrix}；
$$

$$
\text{再变换为：}\ C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 5 \end{bmatrix}；\ \text{再变换：}\ C_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & -5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}；
$$

$$\therefore \quad X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad Z^*=28$$

六. 矿山某生产班组计划用 7 天安排 4 项工作。要求每天只能安排一项工作，每项工作至少需一天时间。估计每项工作所花时间与所获得的增加效益关系如下表。不具体计算，试写出该问题的阶段变量、状态变量及允许状态集合、决策变量及允许决策集合、状态转移方程、阶段指标函数和递推方程。（15 分）

工作天数 \ 工作项目	A_1	A_2	A_3	A_4
1	4	3	5	2
2	4	5	6	4
3	5	6	8	7
4	8	7	8	8

解：用动态规划求解时，其模型为：

1. 按工作项目分为 4 阶段，K=（1，2，3，4，5），k=5 为终了阶段；
2. x_k：k 阶段的状态变量，即开始第 k 项工作前剩余天数；
   有 $X_1=\{7\}$；$X_2=\{3,4,5,6\}$；$X_3=\{2,3,4,5\}$；$X_4=\{1,2,3,4\}$；$X_5=\{0\}$
3. u_k：k 阶段的决策变量，即第 k 项工作的工作天数；
   $U_1=\{1,2,3,4\}$；$U_2=\{1,2,\cdots,x_2-2\}$；$U_3=\{1,2,\cdots,x_3-1\}$；$U_4=\{x_4\}$
4. 状态转移方程：

$$x_{k+1} = x_k - u_k$$

5. 阶段指标见表，如 $v_1(x_1,1)=4$；…；$v_4(x_4,4)=8$ 等
6. 递推方程：$f_k(x_k) = \min\limits_{u_k \in U_k}\{v_k(x_k,u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$
7. 边界条件：$f_5(x_5)=0$

七. 有六口海上油井，相互间距离如下表所示。1 号井离海岸最近，距离为 5 海里。已知，每铺设 1 海里油管的成本为：人工费 30 万元，油管费 50 万元，

其它费用 100 万元。问：从海岸经 1 号井铺设油管，把各油井连接起来，应如何铺设，使总成本最低，最低总成本是多少？（15 分）

油井	1	2	3	4	5	6
	距离（海里）					
1	0	1.3	2.1	0.9	0.7	1.8
2		0	0.9	1.8	1.2	2.6
3			0	2.6	1.0	2.5
4				0	0.8	1.6
5					0	0.9
6						0

解：由题设条件可知，铺设 1 海里油管的总成本为 180 万元。
则原问题转换为网络最小支撑树问题。
原问题网络图如图 1，用破圈法（或避圈法）求其最小支撑树如图 2。

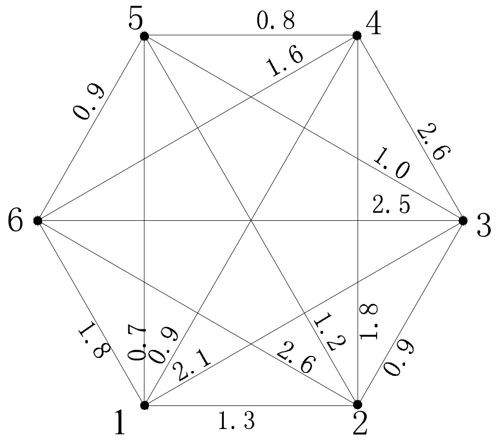


图 1

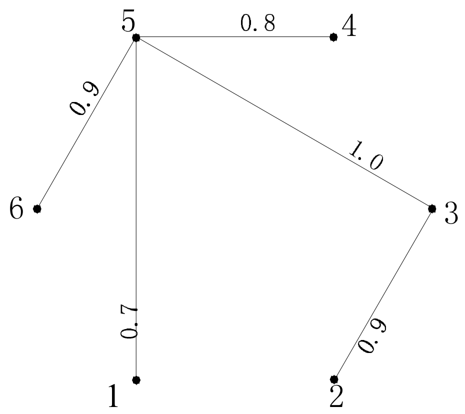
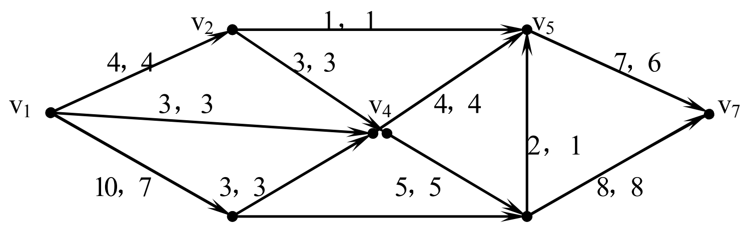


图 2

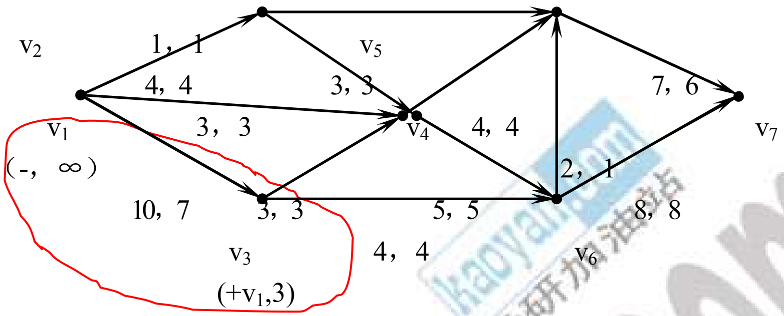
有 W（T_{min}）=4.3
因 1 号井离海岸距离为 5 海里，所以铺设油管总长为 9.3 海里，总成本费用为：9.3×180=1674 万元。

八. 证明下图所示 v_1 至 v_7 流为最大流。弧边数字为 (c_{ij}, f_{ij})。（15 分）



v3　　　　4，4　　　　　v6

证明：对原流图用标号法找可扩充路有：



标号过程进行不下去，即不存在 v_1-v_7 的可扩充路，根据可扩充路定理，图示流即为最大流，maxQ=14。

九. 某建厂方案有四种可供选择，每种方案可能有五种状态，其收益矩阵 D 为：

$$D=\begin{bmatrix} 15 & 10 & 0 & -6 & 17 \\ 3 & 14 & 8 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 14 & 20 & -3 \\ 7 & 19 & 10 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

分别用乐观法、悲观法、等可能法和后悔值法确定其最优决策方案。（15 分）

解：乐观准则：α^*：　$\max\limits_i \max\limits_j \{d_{ij}\} = \max\{17,14,20,19\} = 20$　　$\therefore\ \alpha^* = \alpha_3$

悲观准则：α^*：　$\max\limits_i \min\limits_j \{d_{ij}\} = \max\{-6,2,-3,0\} = 2$　　$\therefore\ \alpha^* = \alpha_2$

等可能准则：α^*：　$\max\limits_i \left\{ \dfrac{\sum_{j=1}^{n} d_{ij}}{n} \right\} = \max\{7.2,7.2,7.4,7.6\} = 7.6$　$\therefore\ \alpha^* = \alpha_4$

后悔值准则：后悔值矩阵为：$D' = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 14 & 26 & 0 \\ 12 & 5 & 6 & 11 & 15 \\ 14 & 14 & 0 & 0 & 20 \\ 8 & 0 & 4 & 18 & 17 \end{bmatrix}$

则 $\alpha*$： $\min_i \max_j \{d'_{ij}\} = \min\{26,15,20,18\} = 15 \quad \therefore \quad \alpha* = \alpha_2$

答题毕