武汉科技大学

2005 年硕士研究生入学考试试题

考试科目及代码：**高等代数 420**　　　　共 3 页　　第 1 页

说　明：1. 适用专业：**应用数学 070104**

2. 可使用的工具：计算器 （ √ ）

3. 答题内容写在答题纸上，写在试题纸或草稿纸上无效

一、填空（6 小题，共 30 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 3/2\\ 0 & 1 & 5/2\end{pmatrix}$，则 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=$______。

2. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}=$__________________。

3. 若 $\boldsymbol{\beta}=\left(0 \quad k \quad k^2\right)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(1+k,\ 1,\ 1\right), \boldsymbol{\alpha}_2=\left(1,\ 1+k,\ 1\right), \boldsymbol{\alpha}_3=\left(1,\ 1,\ 1+k\right)$ 唯一线性表示，则 $k=$______。

4. 若对任意的列向量 $\boldsymbol{x}$，均有 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}=$______。

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为_____。

6. 多项式 x^4-2x+1 的有理根是_____。

二、单项选择题（5 小题，共 30 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵（$n\geq 2$），且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^*=$____。

① $|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$　　② $|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$

③ $|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$　　④ $|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

2. $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，且秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r<n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ ______。

① 有唯一解　　② 有无穷多个解

③ 不一定有解　　④ 无解

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 是非零常数，则 $|k\boldsymbol{A}|=$______。

① $k^n|\boldsymbol{A}|$　　② $k|\boldsymbol{A}|$

③ $|k|^n|\boldsymbol{A}|$　　④ $|k||\boldsymbol{A}|$

4. 如果 $\left(x^2-1, g(x)\right)=1$，且 $\left(x^2-1\right) \mid g(x)h(x)$，则____。

① $(x+1) \mid g(x),\ (x-1) \mid h(x)$

② $(x-1) \mid g(x),\ (x+1) \mid h(x)$

③ $(x+1) \nmid g(x)$，$(x-1) \mid h(x)$

④ $(x+1) \nmid g(x)$，$(x-1) \nmid h(x)$

5. 设 λ_0 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，且齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的全部特征向量是______。

① $\boldsymbol{\eta}_1$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2$　　② $\boldsymbol{\eta}_1$ 或 $\boldsymbol{\eta}_2$

③ $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$　　④ $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$（$k_1, k_2$ 为不全为零的常数）

三、(15 分)

计算 n 阶行列式 $d=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & L & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & L & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & L & 0 \\ L & L & L & L & L \\ 1 & 0 & 0 & L & a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2 L\ a_n\neq 0$。

四、(15 分)

设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,L\ ,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次方程组的一个基础解系，证明：$\boldsymbol{\eta}^*$，ξ_1，$\xi_2,L\ ,\xi_{n-r}$ 线性无关。

五、（15 分）

设 $a_1a_2\cdots a_n \neq (-1)^n$，证明下面的实二次型是正定的

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2。$$

六、（15 分）

设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}$，证明矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$ 满足：$\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}$。

七、（15 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，证明：$\boldsymbol{A}V\subseteq \boldsymbol{A}^{-1}(0)$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}^2$ 是零变换。

八、（15 分）

设 $\boldsymbol{A}(t)$ 是定义在区间 $a\le t\le b$ 上的 $n\times n$ 矩阵函数，$\boldsymbol{f}(t)$ 是定义在区间 $a\le t\le b$ 上的 n 维列向量函数，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是 n 维一阶齐线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad (1)$$

的基解矩阵。试寻求 n 维一阶**非**齐线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \qquad (2)$$

的形如

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t) \qquad (3)$$

的定义在区间 $a\le t\le b$ 上且满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0} \qquad t_0\in[a,b] \qquad (4)$$

的解，其中，$\boldsymbol{c}(t)$ 是待定的 n 维列向量函数。