武汉科技大学

2005 年硕士研究生入学考试试题参考答案

考试科目及代码：概率论与数理统计 423

一、

1．0.4；　2. 7/9；　3. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$；　4. 0.2；　5. 8/9

二、

1．D；　2. B；　3. C；　4.A；　5. B.

三、由 $0.7 = P(B|\bar{A}) = \frac{P(B)-P(AB)}{P(\bar{A})} = \frac{0.6-P(AB)}{0.2} \Rightarrow P(AB) = 0.46$

所以 $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A)-P(AB)}{P(\bar{B})} = \frac{0.8-0.46}{0.4} = 0.85$

四、解：记 A 为“A 是黑球”；$\bar{A}$ 为“A 是白球”

B 为“B 是黑球”；$\bar{B}$ 为“B 是白球”

根据全概率公式，$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$

$$= \frac{3}{5}\times\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{11}{20};$$

根据贝页斯公式，$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

$$= \frac{9/20}{11/20} = \frac{9}{11}$$

五、解：$P(\Delta < 0) = P(X^2 + 4X - 32 < 0) = P(-8 < X < 4)$

$$= \int_{-8}^{4} f(x)dx = \int_{0}^{4} e^{-x}dx = 1 - e^{-4} = 0.98.$$

六、解：设 $F_Y(y)$，$f_Y(y)$ 分别为 Y 的分布函数和密度函数，

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^3 \le y) = P(X \le y^{\frac{1}{3}}) = \Phi(y^{\frac{1}{3}})$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\Phi(y^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}y^{\frac{2}{3}}}e^{-\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}}.$$

七、解：因为 $xf(x)$ 为奇函数，所以

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2.$$

八、解：$P(X>1,Y>1)=1-P(\overline{X>1,Y>1})=1-P(\{X<1\}\cup\{Y<1\})$

$$=1-P(X<1)-P(Y<1)+P(X<1,Y<1)$$

$$=1-F(1,+\infty)-F(+\infty,1)+F(1,1)$$

$$=1-(1-e^{-1})-(1-e^{-2})+1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}=e^{-3}$$

九、解：(X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+Y^2\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1}{\pi}dy=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

故 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

同理，$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

因 $f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以，X,Y 不独立.

由对称性，$EX=\iint\limits_{R\times R}xf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x\dfrac{1}{\pi}dxdy=0$

$$EY=\iint\limits_{R\times R}yf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}y\frac{1}{\pi}dxdy=0$$

$$E(XY)=\iint\limits_{R\times R}xyf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\frac{1}{\pi}dxdy=0$$

所以，$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=0$，X,Y 不相关.

十、解：设 $T_i\ (i=1,2,\cdots,15)$ 为每位顾客接受服务的时间，则 $ET_i=5, DT_i=25$，记

$X=\sum_{i=1}^{15}T_i$，由中心极限定理

$$P(X<60)=P\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}<\frac{60-EX}{\sqrt{DX}}\right)\approx\Phi\left(\frac{60-16\times5}{\sqrt{16\times25}}\right)=1-\Phi(1.5).$$

十一、解：① $E|\bar{X}-\mu|^2=D(\bar{X}-\mu)+[E(\bar{X}-\mu)]^2=\frac{4}{n}\le0.1$

$\Rightarrow n\ge40.$

② $\frac{\bar{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，　$E\left|\frac{\bar{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}\right|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$$E|\bar{X}-\mu|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\sqrt{n}}\le0.1\Rightarrow n\ge\frac{800}{\pi}=255.$$

十二、解：① $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$

$$LnL(\theta)=-nLn\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{dLn\theta}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0\Rightarrow\hat{\theta}_1=\bar{X}$$

② $f_{\min}(x)=\begin{cases}\frac{1}{n\theta}e^{-\frac{x}{n\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$D\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\theta^2,\ D\hat{\theta}_2=n^2D[\min(X_1,\cdots,X_n)]=n\theta^2$$

当 $n>1$ 时，$D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$，故 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

十三、解：$H_0:\mu=179\leftrightarrow H_1:\mu\ne179$

$$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=175.2,\quad s=\sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=1.924$$

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}=\frac{175.2-179}{1.924}\sqrt{5}=-4.416$$

$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(4)=2.7764$，

因$|t|>t_{0.025}(4)$，所以拒绝H_0，即此仪器间接测量有系统偏差.