

2006 硕士研究生入学考试试题参考答案

一、略

二、由 $\frac{dU}{dR} = 0$ 得 $R_0 = \left(\frac{2A_{12}}{A_6}\right)^{1/6} \sigma$

由, $K_0 = \frac{\sqrt{2}}{9R_0} \left(\frac{d^2u}{dR^2}\right)_{R_0}$ 得

$$K_0 = \frac{75}{\sigma^3} \varepsilon$$

三、色散关系为 $\omega = 2\left(\frac{\beta}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left|\sin \frac{qa}{2}\right|$, 波速, $v = a\sqrt{\beta/m}$

每个波矢 q 占据的线度为 $2\pi/L$, 单位线度内波矢 q 的数目为 $L/2\pi$, dq 间隔内 q 的数目为 $L/\pi dq$ 。

在德拜模型下 $\omega = vq$, 其中 $v = a\sqrt{\beta/m}$ 为波速。

则模式密度为 $g(\omega) = \frac{L}{\pi v}$,

晶体的内能 $E = \int_0^{\omega_D} g(\omega) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}\right) \hbar\omega d\omega$

晶体的热容量 $C_V = \frac{Nk}{\omega_D} \int_0^{\omega_D} \frac{e^{\hbar\omega/kT} (\frac{\hbar\omega}{kT})^2}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} d\omega$

其中 $\omega_D = N\pi v$ 为德拜截止频率。k 为玻耳兹曼常数。

$$\frac{L^2}{2\pi^2} dk_x dk_y \rightarrow \frac{L^2}{2\pi^2} 2\pi k dk$$

由 $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ 可得 E 即 $E+dE$ 间的状态数为

$$\frac{L^2}{\pi} \cdot \frac{m}{\hbar^2} dE$$

$$(2) \text{ 绝对零度下 } f(E) = \begin{cases} 1 & E < E_F^0 \\ 0 & E > E_F^0 \end{cases}$$

$$\text{则 } \int_0^{E_F^0} f(E) \cdot \frac{L^2}{\pi} \frac{m}{\hbar^2} dE = \int_0^{E_F^0} \frac{L^2}{\pi} \frac{m}{\hbar^2} dE = N$$

$$\text{则 } E_F^0 = \frac{\hbar^2 N \pi}{m L^2}$$

五、略

$$\text{六、(1) } E_s = E_0 - A - J \sum_{R_n}^{\text{近邻}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_n}$$

最近邻原子的坐标为 $(0, a)$ $(0, -a)$ $(a, 0)$ $(-a, 0)$, 将近邻原

子坐标代入 上式则可得:

$$\begin{aligned} E_s &= E_0 - A - J \sum_{R_n}^{\text{近邻}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_n} \\ &= E_0 - A - 2J \left(\frac{e^{ik_x a} + e^{-ik_x a}}{2} + \frac{e^{ik_y a} + e^{-ik_y a}}{2} \right) \\ &= E_0 - A - 2J (\cos k_x a + \cos k_y a) \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 当 } ka \ll 1 \text{ 时, } \cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2$$

将 E_s 展开为级数则可得

$$E_s = E_0 - A - 4J + Jk^2 a^2$$

$$\text{电子的有效质量为 } m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2 E_s}{dk^2} \right)^{-1} = \frac{\hbar^2}{2Ja^2}$$