

武汉科技大学

2006 年硕士研究生入学考试试题

考试科目及代码： 高等代数 (420)

说明：1. 适用招生专业： 应用数学 070104

2. 可使用的常用工具： 计算器

3. 答题内容只能写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上一律无效。

4. 考试时间 3 小时，总分值 150 分。

一、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 已知 A, B 均为 n 阶矩阵，且 $A^2 - AB = E$ ，则秩 $(AB - BA + A) =$ _____

2. 设 A^* 是三阶矩阵 A 的伴随矩阵，若 $|A| = \frac{1}{3}$ ，则 $|(2A)^{-1} - 3A^*| =$ _____

3. 如果 $(x-1)^2 \mid (Ax^4 + Bx^2 + 1)$ ，则 $A =$ _____， $B =$ _____

4. 若实向量组 $\alpha_1 = (0, 4, 2-t)^T$ ， $\alpha_2 = (2, 3-t, 1)^T$ ， $\alpha_3 = (1-t, 2, 3)^T$ 线性相关，则实数 $t =$ _____

5. 设矩阵 A 与 B 相似，其中 $A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ y & x \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ，则 $x =$ _____
 $y =$ _____

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 k 满足条件 _____

二、单项选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 设 A, B 为 n 阶方阵， A 非零且 $AB = 0$ ，则 _____

A. $B = 0$

B. $|B| = 0$ 或 $|A| = 0$

C. $BA = 0$

D. $(A-B)^2 = A^2 + B^2$

2. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^3 = 0$, 则 $(E - A)^{-1} =$ _____

- A. $E - A + A^2$ B. $E + A + A^2$
C. $E + A - A^2$ D. $E - A - A^2$

3. 已知 $A^2 = E$, 则必有 _____

- A. $A + E$ 可逆 B. $A - E$ 不可逆
C. $A \neq E$ 时, $A + E$ 可逆 D. $A \neq E$ 时, $A + E$ 不可逆

4. 设 A 是三阶非零矩阵, 满足 $A^2 = 0$, 则非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的线性无关的解向量个数最多为 _____

- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

5. 设 A 是三阶矩阵, 且有特征值 1, -2, 4. 则下列矩阵中, 满秩矩阵是 _____

- A. $E - A$ B. $A + 2E$
C. $2E - A$ D. $A - 4E$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B _____

- A. 合同且相似 B. 合同但不相似
C. 不合同但相似 D. 既不合同也不相似

三、(15 分)

计算行列式: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \Lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \Lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \Lambda & 2 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2008 \end{vmatrix}$

四、(15 分)

设 $f(A) = (E - A)(E + A)^{-1}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, 求 $[E + f(f(A))]^{-1}$

五、(15 分)

设 n 阶矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, B 的列向量为 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \alpha_n + \alpha_1$, 试问, 当秩 $(A) = n$ 时, 齐次线性方程组 $Bx = 0$ 是否有非零解? 并证明你的结论。

六、(15 分)

$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3$, ($a > 0$), 已知 f 通过某正交变换可化为标准型 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换矩阵。

七、(15 分)

在 $P^{2 \times 2}$ (二阶方阵所形成的线性空间) 中定义线性变换 A 如下: 对任意的

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in P^{2 \times 2}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x, \quad \text{求 } A \text{ 在基 } E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 下的矩阵 } A。$$

八、(15 分)

A 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证: $\dim A(V) + \dim A^{-1}(0) = n$