

武汉科技大学

2006年硕士研究生入学考试试题

考试科目及代码 高等代数 420 参考答案及评分标准

一. 填空题 (每小题5分, 共30分)

1. 已知 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $A^2 - AB = E$, 则 $|秩(AB - BA + A) - 秩(A)| = \underline{n}$.

2. 设 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵, 若 $|A| = \frac{1}{3}$, 则 $|(2A)^{-1} - 3A^*| = \underline{-\frac{3}{8}}$.

3. 如果 $(x-1)^2 |AX^4 + BX^2 + 1|$, 则 $A = \underline{1}$, $B = \underline{-2}$.

4. 若实向量组 $\alpha_1 = (0, 4, 2-t)^T$, $\alpha_2 = (2, 3-t, 1)^T$, $\alpha_3 = (1-t, 2, 3)^T$, 线性相关, 则实数 $t = \underline{6}$.

5. 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ y & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $x = \underline{-2}$, $y = \underline{-1}$.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 k 满足条件 $\underline{k > 1}$.

二. 单项选择题 (每小题5分, 共30分)

1. 设 A, B 为 n 阶方阵, A 非零且 $AB = 0$, 则 $\underline{B}$.

A. $B = 0$; B. $|B| = 0$ 或 $|A| = 0$;

C. $BA = 0$; D. $(A-B)^2 = A^2 + B^2$.

2. 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $A^3 = 0$, 则 $(E-A)^{-1} = \underline{B}$.

A. $E - A + A^2$; B. $E + A + A^2$

C. $E + A - A^2$; D. $E - A - A^2$

线性代数大对择好左

3. 已知 $A^2 = E$, 则必有 D

A. $A+E$ 可逆; B. $A-E$ 不可逆;

C. $A \neq E$ 时, $A+E$ 可逆; D. $A \neq E$ 时, $A+E$ 不可逆.

4. 设 A 是三阶非零矩阵, 满足 $A^2 = 0$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的线性无关解向量个数是 C.

A. 1个; B. 2个; C. 3个; D. 4个

5. 设 A 是三阶矩阵, 且有特征值 1, -2, 4, 则下列矩阵中, 为秩矩阵是 C.

A. $E-A$; B. $A+2E$; C. $2E-A$; D. $A-4E$

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$, 则 A 与 B A.

A. 合同且相似; B. 合同但不相似.

C. 不合同但相似; D. 既不合同又不相似.

考研数学大纲样题

三. [15分].

计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2008 \end{vmatrix}$

解: $D \xrightarrow[\text{到各列上}]{\text{第二列乘}(-1)\text{加}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 2006 \end{vmatrix} \cdots \cdots 8\text{分}$

$= (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2006 \end{vmatrix} \cdots \cdots 12\text{分}$

$= -2 \cdot 2006! \cdots \cdots 15\text{分}$

线性代数大站精选

1. [15分].

设 $f(A) = (E - A)(E + A)^{-1}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, 求 $[E + f(f(A))]^{-1}$.

解: $f(f(A)) = [E - f(A)][E + f(A)]^{-1}$
 $= [E - (E - A)(E + A)^{-1}][E + (E - A)(E + A)^{-1}]^{-1}$
 $= [(E + A) - (E - A)](E + A)^{-1} [(E + A) + (E - A)](E + A)^{-1}]^{-1} \dots 4分$
 $= 2A(E + A)^{-1} [2E(E + A)^{-1}]^{-1}$
 $= 2A(E + A)^{-1}(E + A)(2E)^{-1}$
 $= 2A(\frac{1}{2}E)$
 $= A \dots \dots \dots 8分$

$\therefore [E + f(f(A))]^{-1}$
 $= (E + A)^{-1}$
 $= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right)^{-1}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \dots \dots \dots 11分$
 $= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots 15分$

五. [15分]

设 n 阶矩阵 A 的 n 个列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, n 阶矩阵 B 的 n 个列向量为 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_n + \alpha_1$, 试问: 当 $\text{秩}(A) = n$ 时, 齐次线性方程组 $Bx = 0$ 是否有非零解? 并证明你的结论.

解: $B = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_n + \alpha_1)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= AC$$

6分

因为 $\text{秩}(A) = n$.

所以 $Bx = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |B| = 0$

$$\text{而 } |B| = |AC| = |A||C|$$

又 $\text{秩}(A) = n$, $\therefore |A| \neq 0$

$$\therefore |B| = 0 \Leftrightarrow |C| = 0$$

11分

$$\text{而由 } |C| = 1 + (-1)^{n+1} = 0$$

13分

所以当且仅当 n 为偶数时, 齐次线性方程组 $Bx = 0$ 有非零解. --- 15分

六. [15分].

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3$ ($a > 0$) 通过正交变换化成标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

解: 由题知 f 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$ 与对角矩阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$ 相似. 2分

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ 4分

将 $\lambda = 1$ 代入特征方程 $|E - A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -a \\ 0 & -a & -2 \end{vmatrix} = 0$

得 $a^2 = 4$, 因 $a > 0$, 故取 $a = 2$ 7分

这时 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

可求得对应于特征值 1, 2, 5 的特征向量分别为

$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 13分

将它们单位化, 即得所求矩阵为

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 15分

七. [15分]

在 $P^{2 \times 2}$ (二阶方阵所成的线性空间) 中定义线性变换 A 如下: 对任意 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $A(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$, 求 A 在基 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵 A .

解: 因为 $A(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + cE_{21}$

$$A(E_{12}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_{12} + cE_{22} \quad \dots \dots 5 \text{分}$$

$$A(E_{21}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{11} + dE_{21}$$

$$A(E_{22}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_{12} + dE_{22} \quad \dots \dots 10 \text{分}$$

$$A(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

所以 A 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \quad \dots \dots 15 \text{分}$$

八. [15分].

A 为 n 维线性空间 V 上的线性变换. 求证: $\dim A(V) + \dim A^{-1}(0) = n$.

证: 设 $\dim A^{-1}(0)$ 为 r . 即 A 的零度为 r . 要证 $\dim A(V)$ 为 $n-r$. 就是要证

A 的秩为 $n-r$.

取 $A^{-1}(0)$ 的一组基: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$. 把它扩充成 V 的基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n$.

$$\text{则 } A(V) = L(A(\xi_1), \dots, A(\xi_r), A(\xi_{r+1}), \dots, A(\xi_n))$$

$$\because \xi_i \in A^{-1}(0), \therefore A(\xi_i) = 0, (i=1, 2, \dots, r).$$

$$\text{故 } A(V) = L(A(\xi_{r+1}), \dots, A(\xi_n)).$$

----- 6分

若能证明 $A(\xi_{r+1}), \dots, A(\xi_n)$ 线性无关. 这就说明了 $A(V)$ 的维数为 $n-r$.

也就证明了 A 的秩为 $n-r$.

下证 $A(\xi_{r+1}), \dots, A(\xi_n)$ 线性无关.

$$\text{设有 } k_{r+1}, \dots, k_n \in P, \text{ 使 } k_{r+1}A(\xi_{r+1}) + \dots + k_n A(\xi_n) = 0$$

$$\text{即有 } A(k_{r+1}\xi_{r+1} + \dots + k_n \xi_n) = 0$$

$$\text{于是 } k_{r+1}\xi_{r+1} + \dots + k_n \xi_n \in A^{-1}(0)$$

----- 11分

因此, 存在 $k_1, k_2, \dots, k_r \in P$, 使

$$k_{r+1}\xi_{r+1} + \dots + k_n \xi_n = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_r\xi_r.$$

$$-k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - \dots - k_r\xi_r + k_{r+1}\xi_{r+1} + \dots + k_n \xi_n = 0$$

因为 $\xi_1, \dots, \xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n$ 线性无关. 由上式得 $k_1 = \dots = k_r = 0$

故 $A(\xi_{r+1}), \dots, A(\xi_n)$ 线性无关. 这样得 A 的秩为 $n-r$.

$$\text{所以, } \dim A(V) + \dim A^{-1}(0) = n$$

----- 15分