武汉科技大学

2007 年硕士研究生入学考试试题

参考答案

课程名称：概率论与数理统计

说明：1. 适用专业：管理科学与工程

2. 可使用的常用工具：计算器

3. 答题内容写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上一律无效

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$ 则 $P(A-B)=$ <u>0.3</u>

2. 有 5 件产品，其中 2 件是次品。从中任取 2 件，恰有 1 件是次品的概率为 <u>0.6</u>

3. 设 X, Y 为两个相互独立的随机变量 $P(X\le 1)=0.5$ $\quad P(Y\le 1)=0.4$

$Z=\max\{X,Y\}$ 则 $P(z\le 1)=$ <u>0.2</u>

4. 已知随机变量 $X\sim N(0,1)$，则随机变量 $Y=2X+1$ 的

概率密度 $f_Y(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-1)^2}{8}}$

5. 已知二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $G:0\le x\le 1, 0\le y\le 2$ 上的均匀分布，

则 $P(0\le Y\le 1/2)=$ <u>1/4</u>

二、单项选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $P(A)=0.2$, $P(B)=0.5$, $P(AB)=0.1$，则事件 A, B（ A ）

A. 相互独立　　B. 相等

C. 互不相容　　D. 互为对立事件

2. 已知随机变量 X,Y 的方差存在，且 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$，

下列结论错误的是（ D ）

A. X, Y 不相关　　B. $D(X-Y)=DX+DY$

C. $E(XY)=(EX)(EY)$ D. $D(XY)=DX\cdot DY$

3. 已知$X\sim N(\mu,1)$，μ为未知参数，$X_1,\dots,X_5$是来自X的样本。下列式子不是统计量的是（ B ）

A. X_1-X_2 B. $\overline{X}-EX$

C. $\min\{X_1,\dots,X_5\}$ D. $\left(\sum_{i=1}^{5}X_i\right)-DX$

4. 在显著性水平为α的假设检验中，H_0为原假设，下列说法正确的是（ A ）

A. H_0为真时，拒绝H_0的概率不超过α。

B. H_0为假时，接受H_0的概率不超过α。

C. 使用这种检验法，结论错误的概率为α。

D. 使用这种检验法，结论正确的概率为$1-\alpha$。

5. 设$EX=EY=2$，$Cov(X,Y)=-\frac{1}{6}$，则$E(XY)=$（ B ）

A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{23}{6}$ C. 4 D. $\frac{25}{6}$

三、解答下列各题（每题 10 分，共 50 分）

1. 已知$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，试求$P(\overline{AB})$.

解：$0.3=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.7-P(AB)$

所以，$P(AB)=0.4\Rightarrow P(\overline{AB})=0.6$

2. 已知一批产品中有 95%是合格品，检查产品质量时，一个合格品被误判为次品的概率为 0.02，一个次品被误判为合格品的概率是 0.03，求：

①任意抽查一个产品，它被判为合格品的概率；

②一个经检查被判为合格品的产品确实是合格品的概率.

解：①记 A：选到合格品；B：判为合格品

$$P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid \overline{A})P(\overline{A})$$
$$=(1-0.02)\times 0.95+0.03\times(1-0.95)=0.9325$$

$$②P(A\mid B)=\frac{P(B\mid A)P(A)}{P(B)}=\frac{0.98\times 0.95}{0.9325}=0.998$$

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=Ce^{-|x|}\quad -\infty<x<+\infty$$

求常数 C 和 $P(0<X<1)$.

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-|x|}dx=2C\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx=2C$

$\therefore C=1/2$

$$P(0<X<1)=\int_0^1\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1})=0.316$$

4. 设随机变量 X 与 Y 独立且均在(0,1)区间上服从均匀分布，$F(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合分布函数求：

① $P\{X+Y<1\}$；② $F(0.5, 0.5)$

解：(1) $P\{X+Y<1\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy$ （6 分） $=\frac{1}{2}$

(2) $F(0.5,0.5)=P\{X<0.5,Y<0.5\}\ =\int_0^{0.5}dx\int_0^{0.5}dy=\frac{1}{4}$

5. 已知 $EX=EY=0$，$DX=DY=1$，X,Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.5$，

求 $E(X+Y)^2$

解：$E(X+Y)^2=D(X+Y)+[E(X+Y)]^2$

$=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}\quad =3$

四、解答下列各题（每题10分，共60分）

1. 已知$X\sim N(0,1)$，求$Y=|X|$的概率密度.

解：记$F_Y(y)$、$f_Y(y)$分别为Y的分布函数和密度函数，

当$y<0$时，$F_Y(y)=0$

当$y\ge 0$时，$F_Y(y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)=2\Phi(y)-1$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}2\Phi'(y) & y\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2} & y\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_6$是来自总体$X\sim N(10,24)$的简单随机样本，试求$P(|\bar{X}\text{-}EX|<1)$.（结果用$\Phi(x)$表示）

解：$\bar{X}\sim N(10,4)$，$EX=10$，$\bar{X}-EX\sim N(0,4)$

所以，$P(|\bar{X}\text{-}EX|<1)=\Phi\left(\dfrac{1-0}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{-1}{2}\right)=2\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right)-1$

3. 假设一条自动生产线生产的产品是合格品的概率为0.8，要使一批产品的合格率在76%与84%之间的概率不小于90%，这批产品至少要生产多少件？

$\Phi(1.64)=0.95$

解：设至少要生产n件，其中合格品为X件，则

$X\sim b(n,0.8)$

$P(0.76<\dfrac{X}{n}<0.84)=$

$P(0.76n<X<0.84n)=P(\dfrac{0.76n-0.8n}{\sqrt{0.8\times 0.2n}}<\dfrac{X-0.8n}{\sqrt{0.8\times 0.2n}}<\dfrac{0.84n-0.8n}{\sqrt{0.8\times 0.2n}})$

$$\approx \Phi\left(\frac{0.04n}{0.4\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{-0.04n}{0.4\sqrt{n}}\right)=2\Phi(0.1\sqrt{n})-1\geq 0.9$$

即$\Phi(0.1\sqrt{n})\geq 0.95\Rightarrow 0.1\sqrt{n}\geq 1.64\Rightarrow n\geq 269$

4. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$为来自总体$N(0,4)$的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，记$Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$. 求：$Y_1$与$Y_n$的协方差$Cov(Y_1,Y_n)$.

解：$Cov(Y_1,Y_n)=E[(Y_1-EY_1)(Y_n-EY_n)]$

$$=E(Y_1Y_n)=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]$$

$$=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=E(X_1X_n)-2E(X_1\overline{X})+E\overline{X}^2$$

$$=0-\frac{2}{n}E[X_1^2+\sum_{j=2}^{n}X_1X_j]+D\overline{X}+(E\overline{X})^2$$

$$=-\frac{2}{n}\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2=-\frac{1}{n}\sigma^2.$$

5. 已知随机变量X的分布率如下：

X	0	1	2
P	θ	2θ	$1-3\theta$

其中$0<\theta<1$，利用样本观察值：0，1，1，2，0，求θ的矩估计和极大似然估计.

解：$EX=2-4\theta,\ \overline{X}=0.8$

由$EX=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=0.3$

似然函数$L(\theta)=\theta^2(2\theta)^2(1-3\theta)$

由$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{4}{\theta}-\dfrac{3}{1-3\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{4}{15}$

6. 设某厂产品的重量服从正态分布，但它的数学期望μ和方差σ^2均未知，抽查10件，测得重量为X_i斤$i=1,2,\cdots,10$。算出

$$\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i=5.4 \qquad \sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2=3.6$$

给定检验水平$\alpha=0.05$，能否认为该厂产品的平均重量为5.0斤？

附：$t_{1-0.025}(9)=2.2622$ $t_{1-0.025}(10)=2.2281$ $t_{1-0.05}(9)=1.8331$ $t_{1-0.05}(10)=1.8125$

解：1.检验统计量为$T=\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|$

2.将已知数据代入，得$t=\frac{5.4-5.0}{\sqrt{3.6/9}}\sqrt{10}=2$

$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(9)=2.2622>2$

所以接受H_0。