武汉科技大学

二〇〇八年硕士研究生入学考试试题

（参考答案）

考试科目代码及名称：813 矿业运筹学

1 （10 分）某配矿问题的线性规划问题为：

$$
\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\
s.t.\quad & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 4 \\
& -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3\text{为自由变量}
\end{aligned}
$$

试将其化为标准型。

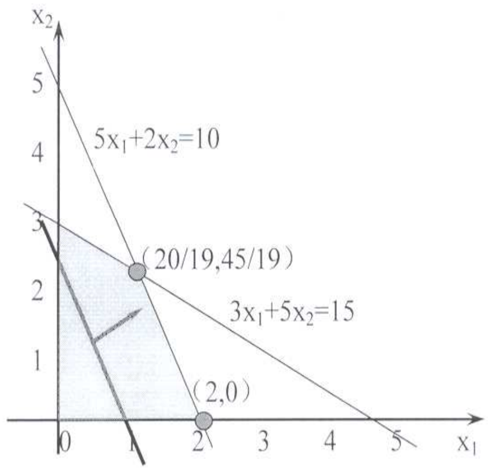
解：原模型标准化为：

$$
\begin{aligned}
\min z' &= -3x_1 + x_2 - 2x_3' + 2x_3'' \\
s.t.\quad & 2x_1 - x_2 - x_3' + x_3'' - x_4 = 4 \\
& -4x_1 + x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 8 \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_3' - x_3'' + x_5 = 9 \\
& x_1, x_2 x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

2 （10 分）用图解法求解

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2.5x_1 + x_2 \\
s.t.\quad & 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\
& 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

解：用图解法有：



该问题有无穷多最优解，

联立 $\begin{cases}5x_1+2x_2=10\\ x_2=0\end{cases}$ 解得 $X^*=(2,0)^T$；$Z^*=5$

联立 $\begin{cases}5x_1+2x_2=10\\ 3x_1+5x_2=15\end{cases}$ 解得 $X^*=(\frac{20}{19},\frac{45}{19})^T$；$Z^*=5$

所以 $X^*=\alpha\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+(1-\alpha)\begin{pmatrix}20/19\\45/19\end{pmatrix}$ $0\le\alpha\le1$；$Z^*=5$

3 （10 分）写出线性规划问题：

$$\begin{aligned}\min z &= 2x_1+2x_2+4x_3\\ s.t\quad & 2x_1+3x_2+5x_3\ge 2\\ & 3x_1+x_2+7x_3\le 3\\ & x_1+4x_2+6x_3\le 5\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0\end{aligned}$$

的对偶规划。

解：原问题的对偶规划为：

$$\begin{aligned}\max w &= 2y_1+y_2+5y_3\\ s.t\quad & 2y_1+3y_2+y_3\le 2\\ & 3y_1+y_2+4y_3\le 2\\ & 5y_1+7y_2+6y_3\le 4\\ & y_1\ge 0;y_2,y_3\le 0\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\max w &= 2y_1-y_2-5y_3\\ s.t\quad & 2y_1-3y_2-y_3\le 2\\ & 3y_1-y_2-4y_3\le 2\\ & 5y_1-7y_2-6y_3\le 4\\ & y_1,y_2,y_3\ge 0\end{aligned}$$

4 （15 分）用表格单纯形法求解

$$\begin{aligned}\max z &= 2.5x_1+x_2\\ s.t.\quad & 3x_1+5x_2\le 15\\ & 5x_1+2x_2\le 10\\ & x_1\ge 0,x_2\ge 0\end{aligned}$$

解：原问题标准化为：

$$\begin{aligned}\min z' &= -2.5x_1-x_2\\ s.t.\quad & 3x_1+5x_2+x_3 \quad\;\; =15\\ & 5x_1+2x_2 \quad +x_4=10\\ & x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{aligned}$$

用单纯形表格迭代有：

C_j		-2.5	-1	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	5	1	0	15
0	x_4	[5]	2	0	1	10
σ_j		-2.5	-1	0	0	0
0	x_3	0	[19/5]	1	3/5	9
-2.5	x_1	1	2/5	0	1/5	2
σ_j		0	0	0	1/2	-5
-1	x_2	0	1	5/19	3/19	45/19
-2.5	x_1	1	0	-2/19	13/95	20/19
σ_j		0	0	0	1/2	-5

所以 $X^*=\alpha\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+(1-\alpha)\begin{pmatrix}20/19\\45/19\end{pmatrix}\quad 0\le\alpha\le1$；$Z^*=5$

5（15 分）用大 M 法求解：

$$\begin{aligned}\max z&=5x_1+3x_2+6x_3\\ s.t.\quad &x_1+2x_2+x_3\le18\\ &2x_1+x_2+3x_3\le16\\ &x_1+x_2+x_3=10\\ &x_1\ge0,x_2\ge0,x_3\text{ 为自由变量。}\end{aligned}$$

解：原问题标准化为：

$$\begin{aligned}\min z'&=-5x_1-3x_2-6x_3+6x_4+Mx_7\\ s.t.\quad &x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=18\\ &2x_1+x_2+3x_3-3x_4+x_6=16\\ &x_1+x_2+x_3-x_4+x_7=10\\ &x_1\ge0,x_2\ge0,x_3\text{ 为自由变量。}\end{aligned}$$

用表格迭代有：

C_j		-5	-3	-6	6	0	0	M	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1	2	1	-1	1	0	0	18
0	x_6	2	1	[3]	-3	0	1	0	16
M	x_7	1	1	1	-1	0	0	1	10
σ_j		-5-M	-3-M	-6-M	6+M	0	0	0	10M
0	x_5	1/3	5/3	0	0	1	-1/3	0	38/3
-6	x_3	2/3	1/3	1	-1	0	1/3	0	16/3
M	x_7	1/3	[2/3]	0	0	0	-1/3	1	14/3
σ_j		-1-M/3	-1-2M/3	0	0	0	2+M/3	0	-32+14M/3

0	x_5	-1/2	0	0	0	1	1/2	-5/2	1
-6	x_3	[1/2]	0	1	-1	0	1/2	-1/2	3
-3	x_2	1/2	1	0	0	0	-1/2	3/2	7
σ_j		-1/2	0	0	0	0	3/2		-39
0	x_5	0	0	1	-1	1	1		4
-5	x_1	1	0	2	-2	0	1		6
-3	x_2	0	1	-1	[1]	0	-1		4
σ_j		0	0	1	-1	0	2		-42
0	x_5	0	1	0	0	1	0		8
-5	x_1	1	2	0	0	0	-1		14
6	x_4	0	1	-1	1	0	-1		4
σ_j		0	1	0	0	0	1		-46

所以有：$X^*=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)^T=(14,0,0,4,8,0,0)^T$；$Z'^*=-46$

还原为原问题有：$X^*=(14,0,-4)^T$；$Z^*=46$

6（15 分）用对偶单纯形法求解线性规划问题：

$$\min z = x_1 + x_2$$
$$s.t.\quad 2x_1 + x_2 \ge 4$$
$$x_1 + 7x_2 \ge 7$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

解：用对偶单纯形法求解有：

C_j		1	1	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	-2	-1	1	0	-4
0	x_4	-1	-7*	0	1	-7
σ_j		1	1	0	0	0
0	x_3	-13/7*	0	1	-1/7	-3
1	x_2	1/7	1	0	-1/7	1
σ_j		6/7	0	0	1/7	1
1	x_1	1	0	-7/13	1/13	21/13
1	x_2	0	1	1/13	-2/13	10/13
σ_j		0	0	6/13	1/13	31/13

∴ 规划问题最优解为 $X^*=(21/13,\ 10/13)^T$；$Z^*=31/13$

7（15 分）用黄金分割法求解：$f(x)=x^2-6x+2$ 的极小点。寻优区间为[0, 10]，只要求迭代一步。

解：（1）$a_0=0, b_0=10, b_0-a_0=10$

$x^{(1)}=a_0+0.382(b_0-a_0)=0+0.382\times 10=3.82\quad f(x^{(1)})=-6.32$

$\bar{x}^{(1)} = a_0 + 0.618(b_0 - a_0) = 0 + 0.618 \times 10 = 6.18 \quad f(\bar{x}^{(1)}) = 3.11$

因 $f(\bar{x}^{(1)}) > f(x^{(1)})$ 所以舍去区间（6.18，10]

8（20 分）试建立求解问题：

$$\min f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 2x_3$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
x_1, x_2, x_3 均是非负整数。

的动态规划模型（不必求解）。

解：原问题可改写为：$\min f(u) = (u_1^2 - 2u_1) + (2u_2^2 - 4u_2) + (u_3^2 - 2u_3)$

$$\text{s.t.} \quad u_1 + u_2 + u_3 = 3$$
u_1, u_2, u_3 均是非负整数。

用动态规划求解时，其模型为：

（1）按变量分为 3 阶段，K=（1，2，3，4），k=4 为终了阶段；

（2）x_k：各阶段得状态变量为：x_1，x_2，x_3，设：

$x_3 = u_3$，$x_2 = x_3 + u_2$，$x_1 = x_2 + u_1 = 3$

即 $u_3 = x_3$，$0 \le u_2 \le x_2$，$0 \le u_1 \le x_1 = 3$

有 $X_3 = \{0, 1, 2, 3\}$，$X_2 = \{0, 1, 2, 3\}$，$X_1 = \{3\}$

（3）u_k：$U_3 = \{x_3\}$，$U_2 = \{0, 1, 2, \ldots, x_2\}$，$U_1 = \{0, 1, 2, 3\}$

（4）状态转移方程：

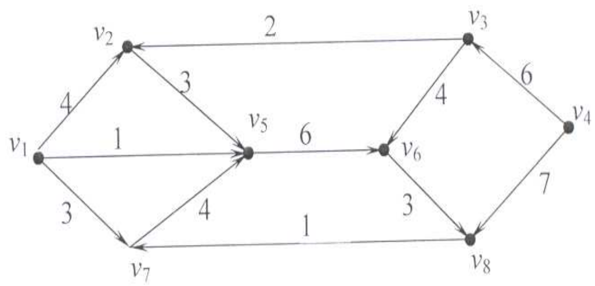
$x_2 = x_1 - u_1 = 3 - u_1$，$x_3 = x_2 - u_2$

（5）阶段指标：$v_1 = (u_1^2 - 2u_1)$，$v_2 = (2u_2^2 - 4u_2)$，$v_3 = (u_3^2 - 2u_3)$

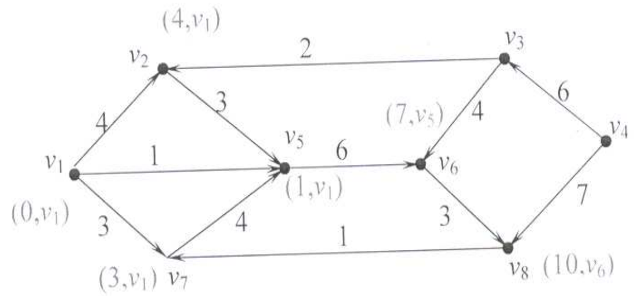
（6）递推方程：$f_k(x_k) = \min\limits_{u_k \in U_k} \{v_k + f_{k+1}(x_{k+1})\}$

（7）边界条件：$f_4(x_4) = 0$

9（20 分）在图中用双标号法求从 v_1 到其它顶点的最短路和最短距离，并指出对 v_1 来说，哪些顶点是不可达的。弧边数字是该弧的长度。



解：标号过程如下：



从 v_1 到其它顶点的最短路和最短距离分别为：

$v_1 \to v_2$ 最短路 $v_1 \to v_2$ 最短距离 4；

$v_1 \to v_3$ 无最短路；

$v_1 \to v_4$ 无最短路；

$v_1 \to v_5$ 最短路 $v_1 \to v_5$ 最短距离 1；

$v_1 \to v_6$ 最短路 $v_1 \to v_5 \to v_6$ 最短距离 7；

$v_1 \to v_7$ 最短路 $v_1 \to v_7$ 最短距离 3；

$v_1 \to v_8$ 最短路 $v_1 \to v_5 \to v_6 \to v_8$ 最短距离 10。

对 v_1 来说，顶点 v_3、v_4 是不可达的。

10 （20 分）某矿山要制定下年度产品的生产计划，根据市场调查和市场预测的结果，得到该产品市场销路好、中、差三种自然状态的概率分别为 0.3、0.5、0.2，矿山采用高、中、低产量生产可能得到收益值也可以计算出来，见下表。现在要求通过决策分析，合理地确定生产量，使企业获得的收益最大。

自然状态 s_j / 方案 d_i	收益		
	销路好 s_1	销路中 s_2	销路差 s_3
	$p(s_1)=0.3$	$p(s_2)=0.5$	$p(s_3)=0.2$
高 产 量 d_1	20	12	8
中等产量 d_2	16	16	10
低 产 量 d_3	12	12	12

解：（1）最大可能准则

由表可以看出，自然状态 s_2 的概率 $p(s_2)=0.5$ 最大，因此产品的市场销路中 (s_2) 的可能性也就最大。于是就考虑按照这种市场销路决策，通过比较可知，矿山采取中等产量收益最大，所以 d_2 是最优决策方案。

$$\therefore\ d^* = d_2$$

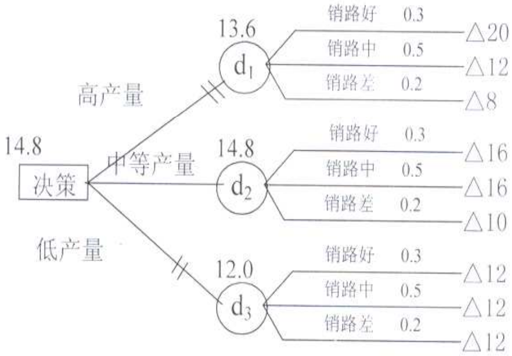
（2）最大期望值准则

方案 d_i \ 自然状态 s_j	收益			$E(d_i)$
	销路好 s_1	销路中 s_2	销路差 s_3	
	$p(s_1)=0.3$	$p(s_2)=0.5$	$p(s_3)=0.2$	
高 产 量 d_1	20	12	8	13.6
中等产量 d_2	16	16	10	14.8
低 产 量 d_3	12	12	12	12.0

$\therefore\ d^* = d_2$

（3）决策树法

决策树如图所示：



$\therefore\ d^* = d_2$

答题毕