准考证号码：

报考学科、专业：

姓名：

密 封 线 内 不 要 写 题

武漢科技大学

二00八年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目及代码： 高等代数 820

适用专业： 应用数学、概率论与数理统计

说明：1. 可使用的常用工具：可以使用无存储、记忆功能的计算器。

2. 答题内容写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上一律无效。考完后试题随答题纸交回。

3. 考试时间 3 小时，总分值 150 分。

注意：以下试题中：A^* 表示 A 的伴随矩阵，A^T 表示 A 的转置，$tr(A)$ 表示 A 的对角元素的和，$R(A)$ 表示 A 的秩。

一、填空（共 5 小题 30 分）

1. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & x \\ 9^2 & 4 & 3^2 & x^2 \\ 9^3 & 8 & 3^3 & x^3 \end{vmatrix}$ 的根为__________。

2. $f(x)=x^4+1$，$g(x)=x^2+x+1$，则 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为__________。

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，已知 $AB=BA$，则 B 的特征值为________。

4. 已知向量 $\beta=(1,a,2)$ 可被向量组 $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(0,3,a)$ 线性表出，则 $a=$__________。

5. A 为 2×4 阶矩阵，B 为 4×2 阶矩阵，则 $|BA|=$________。

二、单项选择题（共 5 小题 30 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆方阵（$n \geq 2$），则_____

A）A 中任意两行元素都不成比例；

B）A 的特征值全为实数；

C）A^* 的行列式为零；

D）A 中有一行元素是其余各行的线性组合。

2. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$，已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

无解，则__________

A）$m>n$；　　B）$m \leqslant n$；

C）$R(A)>n$；　　D）$R(A) \leqslant n$

3. A、B 为 n 阶正交阵，则______

A）$A+B$ 为正交阵；

B）AB 为正交阵；

C）A、B 的特征值都是实数；

D）$A+B$ 的特征值全大于 0。

4. V 是 n 维线性空间，T 为 V 上的线性变换，T 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 和基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵分别为 A、B，则_________

A）$A=B$　　B）存在可逆阵 C 使得 $C^{-1}AC=B$

C）$A^2=B^2$　　D）存在可逆阵 C 使得 $C'AC=B$

5. 已知α,β,γ线性无关，则线性相关的向量组是__________。

A）$\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$　B）α，$\alpha+\beta$，$\alpha+\gamma$

C）$\alpha-\beta$，$\beta-\gamma$，$\gamma-\alpha$　D）$\alpha-\beta$，$\alpha+\beta$，γ

三、(10分)

$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，已知矩阵$A$满足$AB=2A+B$，求$(A-E)^{-1}$。

四、(10分)

$\varepsilon_1=(1,2,-1,0)$，$\varepsilon_2=(1,-1,1,1)$，$\varepsilon_3=(-1,2,1,1)$，$\varepsilon_4=(-1,-1,0,1)$；

$\eta_1=(2,1,0,1)$，$\eta_2=(0,1,2,2)$，$\eta_3=(-2,1,1,2)$，$\eta_4=(1,3,1,2)$，求由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵。

五、(15分) T为平面中的变换：它将平面中的任何一点$\alpha=(x,y)$变成关于直线l的对称点，其中l为一、三象限的角平分线。

1. 写出$T\alpha$的表达式；
2. 验证T为线性变换；
3. 求T的特征值。

六、(15分)

$A=\begin{pmatrix}0&0&2\\x&2&y\\2&0&0\end{pmatrix}$，求$x$与$y$的关系，使得$A$可以与对角阵相似。

七、（40分）

1. V_1、V_2都是V的线性子空间，且$V_1 \subset V_2$，

求证：如果V_1与V_2的维数相等，则$V_1 = V_2$

2. A、B都为$m \times n$阶矩阵，$R(A) = n - s$，$R(B) = n - r$

且$r + s > n$。

求证：方程组$Ax = 0$，与$Bx = 0$有非零公共解。

3. 已知A为n阶实对称可逆方阵，求证存在正定阵B使得于$A^2 = B^2$。

4. 求证相似的矩阵有相同的特征值。

（以下无文字）