武汉科技大学

2008年硕士研究生入学考试试题

参考答案

一、填空题（每小题4分，共20分）

1.把三个不同的球随机的放入三个不同的盒中，则出现两个空盒的概率为 1/9

2.设随机变量 $X \sim N(0,1)$, $\Phi(x)$ 为其分布函数，则 $\Phi(x)+\Phi(-x)=$ 1

3.设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, X_1,X_2,X_3 是来自总体的样本，则但常数

$a=$ 1/2 时，$\hat{\mu}=\frac{1}{3}X_1+aX_2+\frac{1}{6}X_3$ 是未知常数 μ 的无偏估计

4 设总体 $X_1,\cdots,X_{10}$ 是来自 $N(0,1)$ 的样本，则 $E\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2=$ 9

5. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知，$x_1,\cdots,x_n$ 为其样本，若检验问

题为 $H_0:\sigma^2=1$, $H_1:\sigma^2\neq 1$, 则采用的检验统计量应为 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

二、单项选择题（每小题4分，共20分）

1. 设 A,B 为随机事件，则 $(A\cup B)A=$（ B ）

(A). AB　　(B). A　　(C). B　　(D). $A\cup B$

2. .设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，下列结论不一定成立的是

（ D ）

(A) $F(+\infty)=1$　　(B). $F(-\infty)=0$

(C). $0\le F(x)\le 1$　　(D). $F(0)=0$

B D C A D

3. 如果函数 $f(x)=\begin{cases}x, & a\le x\le b\\ 0, & 其它\end{cases}$ 是某连续型随机变量 X 的概率密度，则区间 $[a, b]$ 可以是（ C ）

(A). $[0, 1]$ (B). $[0, 2]$ (C). $[0, \sqrt{2}]$ (D). $[1, 2]$

4. 在显著性水平为 α 的假设检验中，H_0 为原假设，下列说法正确的是（ A ）

A. α 越小，检验中越容易接受 H_0.

B. α 越小，检验中越容易拒绝 H_0.

C. α 变小，检验中对拒绝 H_0 没有影响.

D. α 越小，检验中犯第二类的错误越小.

5. 下列命题中错误的是（ D ）

A. $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}\ (DX>0, DY>0)$

B. $-1\le\rho_{XY}\le 1$

C. $\rho_{XY}=1$ 时，Y 与 X 以概率 1 存在线性关系

D. $\rho_{XY}=-1$ 时，Y 与 X 无线性关系

三、解答下列各题（每题 10 分，共 50 分）

1. 已知事件 A, B 满足 $P(AB)=P(\bar{A}\,\bar{B})$，记 $P(A)=p$，试求 $P(B)$.

解：由 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})\Rightarrow P(AB)=1-P(A\cup B)$

$\Rightarrow P(A)+P(B)=1$

所以 $P(B)=1-p$.

2. . 向区间（0，1）内任意投掷n点，以X表示落入区间（0.8，1）内的点数，试求

(1) $P(X \geq 1)$；　(2) EX^2.

解：(1) $X \sim b(n, 0.2)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.8^n$$

(2) $EX^2 = DX + (EX)^2 = n0.2 \times 0.8 + 0.04n^2 = 0.04n^2 + 0.16n$

3. 已知随机变量X的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} Ax & 0 < x < 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

① 求常数A；

② 求$P(X > 1/2)$.

解：①$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 Axdx = \frac{A}{2}$

$\therefore A = 2$

②$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2xdx = \frac{3}{4}$

4. 设(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

① 求$P(X + Y > 1)$；

② 判断X、Y是否独立.

解：①$P(X + Y > 1) = \iint\limits_{x+y>1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 4xydy = \frac{5}{6}$

② $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

同理，$f_Y=\begin{cases}2y & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

因 $f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$，故 X,Y 相互独立

5. 设 X 表示掷三颗均匀骰子出现的点数之和，求 EX 和 DX

解：设 X_i 表示第 i 颗骰子出现的点数，$i=1,2,3$，则 X_i 之间相互独立，且

$X=X_1+X_2+X_3$

又 $EX_i=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$；

$EX_i^{\ 2}=\frac{1}{6}(1^2+2^2+\cdots+6^2)=\frac{91}{6}$；$DX_i=\frac{91}{6}-\left(\frac{21}{6}\right)^2=\frac{35}{12}$ =2.9

$EX=3EX_i=10.5$

$DE=3DX_i=8.75$

四、解答下列各题（每题 10 分，共 60 分）

1. 已知 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解：记 $F_Y(y)$、$f_Y(y)$ 分别为 Y 的分布函数和密度函数，

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y\geq 0$ 时，$F_Y(y)=P(X^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})=2\Phi(\sqrt{y})-1$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}2\Phi'(y) & y\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}}e^{-\frac{1}{2}y} & y\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

2. 袋中有 2 个白球 3 个红球，今从袋中随机取 2 个球，以 X 表示取到红球的个数，求 EX.

解：X 的分辨率为 $P(X=0)=\frac{1}{10}$，$P(X=1)=\frac{6}{10}$，$P(X=2)=\frac{3}{10}$

$EX=1.2$

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，求

$P\{\max\{X,Y\}\le 1\}$.

解 由题设知，X 与 Y 具有相同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0\le x\le 3\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

则 $P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=P\{X\le 1,Y\le 1\}=P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}$

$$=\left(P\{X\le 1\}\right)^2=\left(\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{9}.$$

4. 设 A，B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A发生,\\ 0, & A不发生,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B发生,\\ 0, & B不发生.\end{cases}$$

求 $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

解：$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$，

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$，

$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$，

$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3}$

Z 的可能取值为：0，1，2 .

$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3}$，

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12},$$

即 Z 的概率分布为：

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

5. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$， $X_1,\cdots,X_{16}$ 为来自总体的样本， 求 μ 的最大似然估计.

解： $L(\mu)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2}}$；

$$\ln L(\mu)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2；$$

$$\frac{d\ln L(\mu)}{d\mu}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\Rightarrow\hat{\mu}=\overline{X}；$$

6. 车辆厂生产的螺杆直径服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从中抽取 5 支，测得直径（单位：毫米）为

22.3　21.5　22.0　21.8　21.4

如果 σ^2 未知，试问直径均值 $\mu=21$ 是否成立？（$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(4)=2.776$）

解： $H_0:\mu=21;\ H_1:\mu\neq 21$

$$\overline{x}=21.8,s^2=0.135$$

$$t=\frac{21.8-21}{\sqrt{0.135/5}}=4.87$$

$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(4)=2.776$，$|t|>2.776$　拒绝 H_0