kaoyan.com
考研加油站

武汉科技大学

二00八年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目及代码：852 离散数学

适用专业：计算机系统结构、计算机软件与理论、计算机应用技术（仅供数学类考生选考）

说明：1. 可使用的常用工具：（有就写明，没有就删除此条）

2. 答题内容写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上一律无效。考完后试题随答题纸交回。

3. 考试时间 3 小时，总分值　　分。

4. 其它需要说明的问题：（有就写明，没有就删除此条）

密封线内不要写题

一、判断题：（20 分，每题 2 分）

1. 设 $A=\{1,2\}, B=\{a\}$，则 $2^A \cup 2^B = 2^{(A\cup B)}$。(X)

2. 设 $P\cup Q=Q$，$P\cap Q=\varnothing$，则 $P=Q$。(√)

3. 有单位元且适合消去律的有限半群一定是群。(√)

4. 设 A 是一个集合，则 $(P(A),\subseteq)$ 是有补格。(√)

5. $K_{5,3}$ 不是哈密顿图。(√)

6. 在完全二元树中，若有 t 片树叶，则其边的总数 $e=2t-1$。(X)

7. 集合 A 上的恒等关系是一个双射函数。(√)

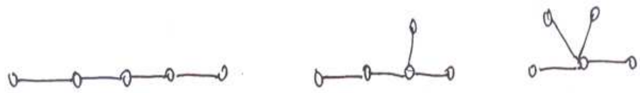
8. 设 $G=<V,E>$ 是连通图，$e\in E$ 是 G 的割边，则 e 在 G 的每棵生成树中。(√)

9. 任何两个具有 2^n 个元素的有限布尔代数都是同构的。(√)

10. 若 R 和 S 是集合 A 上的等价关系，则 $R\cup S$ 一定是等价的。(X)

二、填空题：（20 分，每空 2 分）

1. 含有 5 个结点，4 条边的无向连通图（不同构）有__3__个，它们是____。



您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

kaoyan.com
考研加油站

2. 当$|G|=8$时，群$<G,*>$只能有 2，4 阶非平凡子群，不能有 3,5,6,7 阶子群，其平凡子群为 $\langle\{e\},*\rangle$，$\langle G,*\rangle$。

3. 在一个有n个元素的集合上，可以有 2^{n^2} 种不同的关系，有 n^n 种不同的函数。

4. 任意一个无限群有 无穷多 个子群。

5. 仅当n ≤ 4 时，K_n为平面图。

6. 设$P(x)$：x是奇数，$Z(x)$：x是整数，则语句"不是所有整数都是奇数"所对应的谓词公式为：______。$\neg\forall x(Z(x)\to P(x))$

三、综合题：（110 分）

1. 设$A=\{\varnothing\}, B=P(P(A))$，问下列各题是否正确？（10 分）

$a)\ \varnothing\in B, \varnothing\subseteq B;$

$b)\ \{\varnothing\}\in B, \{\varnothing\}\subseteq B;$

$c)\ \{\{\varnothing\}\}\in B, \{\{\varnothing\}\}\subseteq B.$

解：$A=\{\varnothing\}$，

$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

$B=P(P(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

故有：a) 正确

b) 正确

c) 正确.

2. 用谓词逻辑方法证明：（10 分）

任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车；每一个人或者喜欢乘汽车，或者喜欢骑自行车；有的人不爱骑自行车，因而有的人不爱步行。

解：设 $P(x)$：x喜欢步行；$G(x)$：x喜欢乘汽车；设 $R(x)$：x喜欢骑自行车.

本题符号化为：

$\forall x(P(x)\to\neg G(x)),\ (\forall x)(G(x)\vee R(x)),\ (\exists x)\neg R(x)\vdash P(x)$

获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

证明：(1) $(\exists x)\neg R(x)$　　P

(2) $\neg R(c)$　　ES(1)

(3) $\forall x(G(x)\vee R(x))$　P

(4) $G(c)\vee R(c)$　　US(3)

(5) $G(c)$　　T(2)(4)I

(6) $\forall x(P(x)\to\neg G(x))$　P

(7) $P(c)\to\neg G(c)$　　US(6)

(8) $\neg P(c)$　　T(5)I

(9) $(\exists x)\neg P(x)$　　EG(8).

3. 证明：若无向图中只有两个奇结点，则这两个结点间相互可达。(10 分)

证明：用反证法.

设无向图为G，两个结点为u和v.

若u和v间不可达，则G不连通，因此，G中至少有两个不同的分支G_1和G_2，使得$u\in G_1$，$v\in G_2$. 于是G_1和G_2中各含有一个奇度数结点，这与任何图都有偶数个奇结点矛盾.

故这两个奇结点间一定相互可达。

4. 证明：每个面至少有 4 条边围成的任何连通简单平面图中，$m\le 2n-4$，其中n为结点数，m为边数。(10 分)

证明：由欧拉公式 $n-m+r=2$

因为每个面至少为4，故 $4r\le 2m$，

$r\le\frac{m}{2}$，$n-m+\frac{m}{2}\geq 2$，$n\geq\frac{m}{2}+2$

$\therefore 2n-m\geq m$

5. 试用有向图描述以下问题的解决路径：(10 分)

一个人带一只狼、一只羊和一担白菜过河，但渡船太小，这个人一次只能带狼或羊或白菜三者之一过河。问题是没有人管理时，狼会吃羊，羊也会吃白菜。在这些条件约束下，人怎样才能将狼、羊、白菜从左岸带到右岸？

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

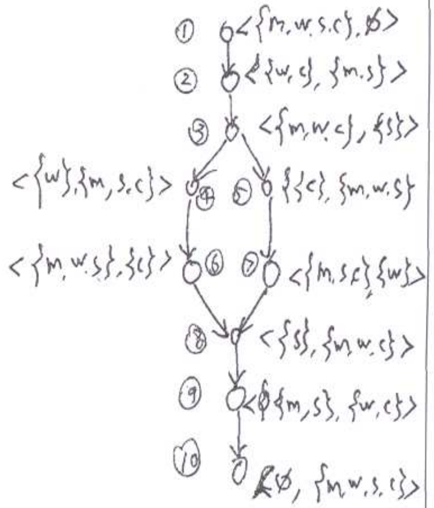
解：用结点表示状态，初始状态可记为 $<\{m,w,s,c\},\varnothing>$，人和羊过河后的状态为 $<\{w,c\},\{m,s\}>$。若从状态 S_1 可变为 S_2，则从结点 S_1 画一条有向边到结点 S_2。其中：m：人，w：狼，s：羊，c：菜。不考虑回头路。

有向图如右所示：

路径有两条，写其中任意一条即可

①→②→③→④→⑥→⑧→⑨→⑩

①→②→③→⑤→⑦→⑧→⑨→⑩



6. 设 a 和 b 是格 $(A,\le)$ 中的两个元素，证明：当且仅当 a 和 b 是不可比较时，才有 $a\wedge b<a$ 和 $a\wedge b<b$。（10 分）

证明：必要性：

用反证法，当 a 和 b 可比较时，$a\le b$ 或 $b\le a$。

当 $a\le b$ 时，$a\wedge b=a$ 与 $a\wedge b<a$ 矛盾

当 $b\le a$ 时，$a\wedge b=b$ 与 $a\wedge b<b$ 矛盾

所以，a 和 b 是不可比较的。

充分性：

当 a 和 b 不可比较时，因为 $a\wedge b\le a$，$a\wedge b\le b$，如果 $a\wedge b=a$，那么 $a=a\wedge b\le b$，a 和 b 可以比较了，因此 $a\wedge b\ne a$ 即 $a\wedge b<a$，同理可证，$a\wedge b<b$。

7. 设 $<H,*>$ 是独异点，且 H 中任意 x，有 $x*x=e$，其中 e 为单位元，试证明：$<H,*>$ 是交换群。（10 分）

证明：由已知，$\forall x\in H$，有 $x*x=e$，$\therefore\ x^{-1}=x$.

获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

又对$\forall x, y \in H$，由$<H, *>$是独异点，有$x*y \in H$，

$\therefore (x*y)*(x*y)=e$，

于是 $x^{-1}*(x*y)*(x*y)*y^{-1}=x^{-1}*e*y^{-1}$，

$(x^{-1}*x)*y*x*(y*y^{-1})=x^{-1}*e*y^{-1}$，

$e*y*x*e=x^{-1}*y^{-1}=x*y \quad \therefore y*x=x*y$

综上，$<H, *>$是交换群。

8. 设正整数的序偶集合A，在A上定义二元关系R如下：$<<x,y>,<u,v>> \in R$，当且仅当 $xv=yu$，证明：R是一个等价关系。（10分）

证明：设A上定义的二元关系为：

$<<x,y>,<u,v>> \in R$，当且仅当 $x \cdot v = y \cdot u$，

即是 $<<x,y>,<u,v>> \in R \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v}$.

(1) $\forall$任意$<x,y> \in A$，因为$\frac{x}{y}=\frac{x}{y}$

$\therefore <<x,y>,<x,y>> \in R$. $\therefore R$是自反的.

(2) 设$<x,y> \in A$，$<u,v> \in A$，若$<<x,y>,<u,v>> \in R \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v}$

$\Rightarrow \frac{u}{v}=\frac{x}{y} \Rightarrow <<u,v>,<x,y>> \in R \quad \therefore R$是对称的.

(3) $\forall <x,y> \in A$，$<u,v> \in A$，$<w,s> \in A$.

由$<<x,y>,<u,v>> \in R \wedge <<u,v>,<w,s>> \in R \Rightarrow (\frac{x}{y}=\frac{u}{v}) \wedge (\frac{u}{v}=\frac{w}{s})$

$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{w}{s} \Rightarrow <<x,y>,<w,s>> \in R \quad \therefore R$是传递的.

由上可知，R是一个等价关系.

9. 求合式公式$\neg((\forall x)(\exists y)F(a,x,y) \to (\exists x)(\neg(\forall y)G(y,b) \to H(x)))$的无$\exists$前束范式。（10分）

解：$\neg((\forall x)(\exists y)F(a,x,y) \to (\exists x)(\neg(\forall y)G(y,b) \to H(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\forall x)(\exists y)F(a,x,y) \vee (\exists x)((\forall y)G(y,b) \vee H(x)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)F(a,x,y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)G(y,b) \vee H(x)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)F(a,x,y) \wedge (\forall x)(\exists u)(\neg G(u,b) \wedge \neg H(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists u)(F(a,x,y) \wedge \neg G(u,b) \wedge \neg H(x))$

获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

令 f、g 为一元函词，则元公式前束范式为：

$$(\forall x)(F(a,x,f(x)) \wedge \neg G(g(x),b) \wedge \neg H(x)).$$

10. 若G为简单图，且$m > C_{n-1}^{2}$，则G是连通的，其中m和n分别为该图的边数和顶点数。（20分）

证明，对顶点数 n $(n \geq 3)$ 采用数学归纳法证明.

(1) 当$n=3$时，有$m \geq 2$

又∵G是简单图 ∴G是连通的.

(2) 归纳假设$n=k$时成立.

(3) 对于$n=k+1$时

∵ $m > C_k^2$，删去图中任何一个顶点v

显然 $d(v) > 0$，否则图就是简单图

如果v的度数为k，又因为图G是简单图.

∴ v与图G中的其他顶点都相邻 ∴图G是连通的.

如果$0 < d(v) \leq k-1$，则在删去v后的子图 G'中，设子图G'的边数为m'

$m' > C_k^2 - (k-1) > C_{k-1}^2$

根据归纳假设，子图G'是连通的.

∴ 图G是连通的.

综上所述，若G为简单图，且$m > C_{n-1}^2$，则G是连通的.

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com