武漢科技大学

二００九年招收硕士研究生入学考试试题

解 答

考试科目及代码： 概率论与数理统计 代码：823

适用专业： 管理科学与工程

可使用的常用工具： 计算器.

答题内容写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上一律无效，考完后试题随答题纸交回。

考试时间 **3** 小时，总分值 150 分。

准考证号码：

报考学科、专业：

姓名：

密 封 线 内 不 要 写 题

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设袋中有 5 个球，分别编有 1 至 5 的号码. 从中任取两球，则取出的两球号码均为奇数的概率为 0.3

2. 设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
	$C/2$	5/8	$C/4$

则常数 $C=$ 1/2

3. 已知 $DX=4, DY=1$，且 X,Y 相互独立，$Z=X-2Y$，则 $DZ=$ 8

4. 设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，来自总体的样本容量 $n=12$，样本均值 $\overline{X}=2.5$，则 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=$ 5

5. 已知随机变量 $X\sim\chi^2(5)$，$\chi^2{}_{0.05}(5)$ 为 X 的上 α 分位数，则 $P(X\le\chi^2{}_{0.05}(5))=$ 0.95

二、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

6. 掷一枚骰子，设 $A=\{$出现奇数点$\}$，$B=\{$出现 1 或 3 点$\}$，则下列说法正确的是

（A） $AB=\{$出现奇数点$\}$ （B） $A\overline{B}=\{$出现 5 点$\}$

（C） $\overline{B}=\{$出现 5 点$\}$ （D） $A\cup B=\{$出现 5 点$\}$

答：【 B 】

7. 设 $X \sim N(1,2^2)$，$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$ 为标准正态分布函数，则 $P(X<2)=$

（A）$\Phi(2)$　　　　　　（B）$1-\Phi(2)$

（C）$\Phi(0.5)$　　　　　　（D）$1-\Phi(0.5)$

答：【　C　】

8. 设二维随机向量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，其边缘分布函数为 $F_X(x),F_Y(y)$. 若对某一组固定的数 (x_0,y_0) 有 $F_X(x_0)F_Y(y_0)=F(x_0,y_0)$，则下列结论正确的是

（A）X 和 Y 相互独立　　　　（B）X 和 Y 不独立

（C）X 和 Y 可能独立，也可能不独立　　（D）X 和 Y 在 (x_0,y_0) 处独立

答：【　C　】

9. 已知总体 $X \sim N(\mu,3^2)$，其中 μ 是未知参数，X_1,K,X_n 是来自总体 X 的样本，则下列随机变量不是统计量的为

（A）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$　　　　（B）X_1

（C）X_n-X_1　　　　（D）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-3)^2$

答：【　A　】

10. 在假设检验中，设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，X_1,K,X_n 为样本，若检验问题为

$H_0:\mu\le\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$，记 $u=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$，则在显著水平 α 下，H_0 的拒绝域为

（A）$|u|>u_{\alpha/2}$　　　　（B）$u>u_\alpha$

（C）$|u|\le u_{\alpha/2}$　　　　（D）$u<-u_\alpha$

答：【　B　】

三、解答题（每小题 10 分，共 50 分）

11. 已知$P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$求$P(A\cup B)$.

解：$P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

12. 袋中共有 10 个球，其中 4 个白球 6 个红球. 若甲先任取一球不再放回，乙再任取取一球，求乙取得白球的概率。

解：记$A=$“乙取得白球”，$B=$ “甲取得白球”

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})=\frac{3}{9}\times\frac{4}{10}+\frac{4}{9}\times\frac{6}{10}=0.4$$

13. 已知随机变量X的分布律为

X	**1**	**2**	**3**	**4**
	0.1	0.2	0.3	0.4

设$F(x)$是X的分布函数

（1）求$F(2.5)$；

（2）求$P(1<X<3.5)$.

解：（1）$F(2.5)=P(X\le 2.5)=P(X=1)+P(X=2)=0.3$

（2）$P(1<X<3.5)=P(X=2)+P(X=3)=0.5$

14. 设某位枪手射击时击中目标的概率为$p(0<p<1)$，该枪手对目标射击 n 次，记X为击中目标的次数，求

（1）$P(X\ge 1)$；

（2）EX^2.

解：（1）$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^n$；

（2）$EX^2=DX+(EX)^2=np(1-p)+(np)^2$.

15. 已知随机向量(X,Y)的联合分布律为

Y / X	1	3
2	0.1	0.2
3	0.3	0.4

（1）判断 X,Y 是否独立；

（2）求 $P(Y=1|X=2)$.

解：（1）$P(X=2,Y=1)=0.1$，$P(X=2)=0.1+0.2=0.3$

$$P(Y=1)=0.1+0.3=0.4$$

$$P(X=2,Y=1)\neq P(X=2)P(Y=1)$$

所以，X,Y 不独立.

（2）$P(Y=1|X=2)=\dfrac{P(Y=1,X=2)}{P(X=2)}=\dfrac{0.1}{0.3}=\dfrac{1}{3}$.

四、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

16. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1）求 EX；

（2）求 EX^2.

解：（1）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\dfrac{3}{4}$

（2）$EX^2=\int_0^1 x^2 3x^2dx=\dfrac{3}{5}$.

17. 在总体 $N(52.6,3^2)$ 中随机抽一容量为 36 的样本，求样本均值 $\bar{X}$ 落在 50.8 到 53.8 之间的概率.（结果用 $\Phi(x)$ 表示）

解：$\bar{X}\sim N(52.6,\dfrac{9}{36})$

$$P(50.8<\bar{X}<53.8)=\Phi\left(\frac{53.8-52.6}{0.5}\right)-\Phi\left(\frac{50.8-52.6}{0.5}\right)=\Phi(2.4)-\Phi(-3.6)$$

18. 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数，已知取得了样本值 $x_1=1,x_2=2,x_3=1$，求 θ 的矩估计和最大似然估计.

解：（1）矩估计：$EX=\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=-2\theta+3$

$$\overline{X}=\frac{1}{3}(1+2+1)=\frac{4}{3}$$

令 $EX=\overline{X}$，得 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$.

（2）最大似然估计：

$$L(\theta)=\theta^2\cdot\theta^2\cdot2\theta(1-\theta)=2\theta^5-2\theta^6$$

$$\frac{d\ln(\theta)}{d\theta}=10\theta^4-12\theta^5=0$$

得 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$

19. 一台机床加工轴的直径服从正态分布 $N(9.5,0.2^2)$（单位：mm），机床经调整后随机取 16 根测量其直径，计算得 $\bar{x}=9.52$ mm，假设调整后方差不变，问调整后的机床加工轴的直径有无显著变化？（$\alpha=0.05$，$u_{0.025}=1.96,u_{0.05}=1.64$）.

解：$H_0:\mu=9.5,\quad H_1:\mu\neq9.5$

拒绝域：$|u|=\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}}>u_{\alpha/2}$

$|u|=\dfrac{|9.52-9.5|}{0.2/\sqrt{16}}=0.4$，$u_{0.025}=1.96$

$|u|<u_{0.025}$，故接受 H_0，可以认为调整后的机床加工轴的直径无显著变化.

20. 向区间（0，1）内随机投掷 n 个点，记 X_i（$i=1,2,\cdots,n$）为第 i 次投点的坐标，又设

$Y=\max\{X_1,\cdots,X_n\}-\min\{X_1,\cdots,X_n\}$，求 EY.

解：X_i 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & 1<x\end{cases}$

记 $Y_n=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$，$Y_1=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$

则 Y_n,Y_1 的密度函数分别为 $p_n(x)=nF^n(x)p(x)=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$p_1(x)=n[1-F(x)]^{n-1}p(x)=\begin{cases}n(1-x)^n, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$EY_n=\int_0^1 xnx^{n-1}dx=\frac{n}{n+1}$，$EY_1=\int_0^1 xn(1-x)^{n-1}dx=1-\frac{n}{n+1}$

$EY=EY_n-EY_1=\frac{2n}{n+1}-1=\frac{n-1}{n+1}$.

21. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

分别是样本均值和样本方差，试求常数 C 使得 $T=C\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S_n}$ 服从 t 分布，并指出分布的自由度。

解：$X_{n+1}-\bar{X}\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$，即 $\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\sim N(0,1)$

$\frac{(n-1)S_n^{\ 2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 它们相互独立

所以，$$\frac{\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_n^{\ 2}}{\sigma^2(n-1)}}}=\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S_n\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\sim t(n-1)$$

所以 $c=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$，自由度为 $n-1$.