武汉科技学院

2006 年招收硕士学位研究生试卷

科目代号	411	科目名称	数值分析
考试时间	2006 年 1 月 15 日下午	报考专业	纺织材料与纺织品设计

1、试题内容不得超过画线范围，试题必须打印，图表清晰，标注准确。
2、试题之间不留空格。
3、答案请写在答题纸上，在此试卷上答题无效。
4、允许使用计算器。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	得分
得分										

本试卷总分 150 分，考试时间 3 小时。

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

(1) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & -8 & 2\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$________.

(2) 对于方程组 $\begin{cases}2x_1-5x_2=1\\ 10x_1-4x_2=3\end{cases}$, Jacobi 迭代法的迭代矩阵是 $G_J=$______________.

(3) $\sqrt[3]{x^*}$ 的相对误差约是 x^* 的相对误差的_____ 倍.

(4) 求方程 $x=f(x)$ 根的牛顿迭代格式是____________________.

(5) 设 $f(x)=x^3+x-1$，则差商 $f[0,1,2,3]$=__________.

(6) 设 $n\times n$ 矩阵 G 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵 G 的谱半径 $\rho(G)=$___________.

(7) 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则条件数 $Cond_\infty(A)$_________.

(8) 为了提高数值计算精度，当正数 x 充分大时，应将 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ 改写为_______.

(9) n 个求积节点的插值型求积公式的代数精确度至少为______次.

(10) 拟合三点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，$(x_3,f(x_3))$ 的水平直线是_____________.

二. (15 分) 证明: 方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

使用 Jacobi 迭代法求解不收敛.

三. (15 分) 定义内积

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

试在 $H_1 = Span\{1,x\}$ 中寻求对于 $f(x) = \sqrt{x}$ 的最佳平方逼近元素 $p(x)$.

四. (15 分) 给定数据表

x	-2	-1	0	1	2
y	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

试用三次多项式以最小二乘法拟合所给数据.

五. (15 分) 依据如下函数值表

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

建立不超过三次的拉格朗日插值多项式.

六. (15 分) 用矩阵的直接三角分解法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

七. (15 分) 试用 Simpson 公式计算积分

$$\int_1^2 e^{1/x}dx$$

的近似值, 并估计截断误差.

八. (15 分) 用 Newton 法求方程 $x - \ln x = 2$ 在区间 $(2,\infty)$ 内的根, 要求 $\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < 10^{-8}$.

九. (15 分) 给定数表

x	-1	0	1	2
$f(x)$	10	14	16	15
$f'(x)$	1		0.1	

求次数不高于 5 的多项式$H_5(x)$，使其满足条件：

$$\begin{cases} H_5(x_i)=f(x_i), & i=0,1,2,3 \\ H_5'(x_i)=f(x_i), & i=0,2 \end{cases}$$

其中$x_i=-1+i,\quad i=0,1,2,3$。

武汉科技学院

2006 年招收硕士学位研究生试卷答案与评分标准

科目代号	411	科目名称	数值分析
考试时间	2006 年 1 月 15 日下午	报考专业	纺织材料与纺织品设计

1、试题内容不得超过画线范围，试题必须打印，图表清晰，标注准确。
2、试题之间不留空格。
3、答案请写在答题纸上，在此试卷上答题无效。
4、允许使用计算器。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	得分
得分										

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

(1) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & -8 & 2\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$ __13__.

(2) 对于方程组 $\begin{cases}2x_1-5x_2=1\\ 10x_1-4x_2=3\end{cases}$, Jacobi 迭代法的迭代矩阵是 $G_J=\begin{bmatrix}0 & 2.5\\ 2.5 & 0\end{bmatrix}$ 。

(3) $\sqrt[3]{x^*}$ 的相对误差约是 x^* 的相对误差的 __1/3__ 倍.

(4) 求方程 $x=f(x)$ 根的牛顿迭代格式是 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n-f(x_n)}{1+f'(x_n)}$ 。

(5) 设 $f(x)=x^3+x-1$，则差商 $f[0,1,2,3]=$ __1__ 。

(6) 设 $n\times n$ 矩阵 G 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵 G 的谱半径 $\rho(G)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ 。

(7) 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则条件数 $Cond_\infty(A)$ __6__ 。

(8) 为了提高数值计算精度，当正数 x 充分大时，应将 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ 改写为

$\underline{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}$ 。

(9) n 个求积节点的插值型求积公式的代数精确度至少为 $\underline{n-1}$ 次.

(10) 拟合三点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，$(x_3,f(x_3))$ 的水平直线是 $\underline{y=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}f(x_i)}$ 。

二. (15 分) 证明: 方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+x_2-2x_3=1\end{cases}$$

使用 Jacobi 迭代法求解不收敛.

证明 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$G_J=\begin{bmatrix}0 & 0.5 & -0.5\\ -1 & 0 & -1\\ 0.5 & 0.5 & 0\end{bmatrix} \qquad （5 分）$$

G_J 的特征多项式为

$$\det(\lambda I-G_J)=\begin{vmatrix}\lambda & -0.5 & 0.5\\ 1 & \lambda & 1\\ -0.5 & -0.5 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2+1.25) \qquad （5 分）$$

G_J 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\sqrt{1.25}\,i$，$\lambda_3=-\sqrt{1.25}\,i$，故 $\rho(G_J)=\sqrt{1.25}>1$，因而 Jacobi 迭代法不收敛。 （5 分）

三. (15 分) 定义内积

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

试在 $H_1=Span\{1,x\}$ 中寻求对于 $f(x)=\sqrt{x}$ 的最佳平方逼近元素 $p(x)$.

解 $\varphi_0(x)\equiv 1$，$\varphi_1(x)\equiv x$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 dx=1,\quad (\varphi_1,\varphi_0)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},\quad (\varphi_0,f)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$$

$$(\varphi_1, f) = \int_0^1 x\sqrt{x}dx = \frac{2}{5}$$ （5 分）

法方程为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$ （5 分）

解得 $c_0 = \frac{4}{15}$，$c_1 = \frac{12}{15}$。所求的最佳平方逼近元素为

$$p(x) = \frac{4}{15} + \frac{12}{15}x, \quad 0 \le x \le 1$$ （5 分）

四. (15 分) 给定数据表

x	-2	-1	0	1	2
y	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

试用三次多项式以最小二乘法拟合所给数据.

解 $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 34 \\ 10 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 130 \end{bmatrix}$$

$$A^T y = (2.9, 4.2, 7, 14.4)^T$$ （8 分）

法方程

$$A^T A c = A^T y$$ （2 分）

的解为 $c_0 = 0.4086$，$c_1 = 0.39167$，$c_2 = 0.0857$，$c_3 = 0.00833$ （3 分）

得到三次多项式

$$y(x) = 0.4086 + 0.39167x + 0.0857x^2 + 0.00833x^3$$

误差平方和为 $\sigma_3 = 0.000194$ （2 分）

五. (15 分) 依据如下函数值表

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

建立不超过三次的牛顿插值多项式.

解 插值基函数

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}=-\frac{1}{8}x^3+\frac{7}{8}x^2-\frac{7}{4}x+1$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}x$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}=-\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{4}x^2-x$$

$$l_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}=\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{12}x$$ （8 分）

拉格朗日插值多项式为

$$L_3(x)=\sum_{i=0}^{3}f(x_i)l_i(x)=l_0(x)+9l_1(x)+23l_2(x)+3l_3(x)$$

$$=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$$ （7 分）

六. (15 分) 用矩阵的直接三角分解法解方程组

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\17\\7\end{bmatrix}$$

解 设

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}$$ （4 分）

由矩阵乘法可求出 u_{ij} 和 l_{ij}

$$\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\1&2&1&\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$ （3 分）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{（3 分）}$$

解下三角方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

有 $y_1 = 5$，$y_2 = 3$，$y_3 = 6$，$y_4 = 4$。再解上三角方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

得原方程组的解为 $x_1 = 1$，$x_2 = 1$，$x_3 = 2$，$x_4 = 2$。（5 分）

七. (15 分) 试用 Simpson 公式计算积分

$$\int_1^2 e^{1/x} dx$$

的近似值, 并估计截断误差.

解

$$\int_1^2 e^{1/x} dx \approx \frac{2-1}{6}(e + 4e^{1/1.5} + e^{1/2}) = 2.0263 \qquad \text{（8 分）}$$

$$f^{(4)} = \left(\frac{1}{x^8} + \frac{12}{x^7} + \frac{36}{x^6} + \frac{24}{x^5}\right) e^{1/x}$$

$$\max_{1 \le x \le 2} \left| f^{(4)}(x) \right| = f^{(4)}(1) = 198.43$$

截断误差为

$$\left| R_2 \right| \le \frac{(2-1)^5}{2880} \max_{1 \le x \le 2} \left| f^{(4)}(x) \right| = 0.06890 \qquad \text{（7 分）}$$

八. (15 分) 用 Newton 法求方程 $x - \ln x = 2$ 在区间 $(2, \infty)$ 内的根, 要求 $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < 10^{-8}$。

解 此方程在区间 $(2, \infty)$ 内只有一个根 s，而且在区间（2，4）内。设

$$f(x) = x - \ln x - 2$$

则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，　$f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　（5 分）

Newton 法迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-\ln x_k-2}{1-1/x_k}=\frac{x_k(1+\ln x_k)}{x_k-1},\quad k=0,1,2,\cdots$$　（5 分）

取 $x_0=3$，得 $s\approx x_4=3.146193221$。　（5 分）

九. (15 分) 给定数表

x	-1	0	1	2
$f(x)$	10	14	16	15
$f'(x)$	1		0.1	

求次数不高于 5 的多项式 $H_5(x)$，使其满足条件

$$\begin{cases} H_5(x_i)=f(x_i), & i=0,1,2,3 \\ H_5'(x_i)=f(x_i), & i=0,2 \end{cases}$$

其中 $x_i=-1+i,\quad i=0,1,2,3$。

解 先建立满足条件

$$p_3(x)=f(x_i),\quad i=0,1,2,3$$

的三次插值多项式 $p_3(x)$。采用 Newton 插值多项式

$$p_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=10+4(x+1)-(x+1)x-\frac{1}{6}(x+1)x(x-1)$$

$$=14+\frac{19}{6}x-x^2-\frac{1}{6}x^3$$　（8 分）

再设 $H_5(x)=p_3(x)+(ax+b)(x+1)x(x-1)(x-2)$，由

$$\begin{cases} H_5'(-1)=p_3'(-1)+(-a+b)(-6)=1 \\ H_5'(1)=p_3'(1)+(a+b)(-2)=0.1 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} -a+b=\dfrac{11}{8} \\ a+b=\dfrac{17}{60} \end{cases}$$

解得 $a=-\dfrac{59}{360}$，$b=\dfrac{161}{360}$。 （5 分）

故所求的插值多项式

$$H_5(x)=14+\frac{19}{6}x-x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{360}(161-59x)x(x^2-1)(x-2)$$ （2 分）