华 中 师 范 大 学

二00二年研究生入学考试试题

招生专业：数学与应用数学

研究方向：课程与教学论、基础数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论

考试科目：数学分析

考试时间 元 月27日上午

一、（32分）求下列极限。

1．设$x_n=\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n},n=1,2,3,\cdots$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

2．设$x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots\dfrac{2n-1}{2^n},n=1,2,3,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

3．求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

4．设$f(x)$在$x=a$点有连续的导数，$f(a)\neq 0,f'(a)\neq 0$，求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+1/n)}{f(a)}\right)^n$$

二、（10分）设数列$\{x_n\}$满足：$x_0=1,x_{n+1}=\sqrt{2x_n},n=0,1,2,\cdots$

证明：$\{x_n\}$收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

三、（10分）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导$(b>a>0),f(a)\neq f(b)$,

证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使$f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$

四、(10分)设$f(x)$在$[a,b]$上非负且三阶可导，方程$f(x)=0$在(a,b)内有两个不同的实根，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使$f^{(3)}(\xi)=0$

五、(10分)设a、b、A均为不为零的有限数，证明：

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-e^b}{x-a}=Ae^b$

六、(10分)设$f_0(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x,y)$在闭区域

$D=\{a\le x\le b,a\le y\le b\}$上连续，对任何$x\in[a,b]$，令

$f_n(x)=\int_a^x g(x,y)f_{n-1}(y)dy,n=1,2,3,\cdots$

证明：函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于零。

七、(10分)设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\le x\le 1}f(x)=-1$

证明：存在$\xi\in(0,1)$ 使 $\max\limits_{0\le x\le 1}f^{(2)}(\xi)\ge 8$

八、(8分)设$f(x)$在$[-1,1]$上有二阶连续导数，$f(x)$的值域在$[-1,1]$上，

$f(0)=0$，$0<f'(0)<1/2$，$|f''(x)|\le M<1$，

令$f_1(x)=f(f(x)), f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),n=1,2,3,\cdots$

证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[-1,1]$上一致收敛