华中师范大学

二00三年研究生入学考试试题

招生专业：课程与教学论、基础数学

概率论与数理统计，

应用数学、运筹学与控制论.

研究方向：

考试科目：数学分析与高等代数（线性代数）

考试时间：元月19日上午

一、（16分）求下列极限：

1、$\lim\limits_{n\to+\infty}(n!)^{(1/n^2)}$

2、$f(x)$在$[-1，1]$上连续，恒不为0，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}-1}{3^x-1}$

二、（15分）设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，过点$A(a,f(a))$与$B(b,f(b))$的直线与曲线

$y=f(x)$相交于$C(c,f(c))$，其中$a<c<b$，

证明：在(a,b)中至少存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$

三、（15分）证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln^2 x$ 在 $(0,1]$ 上一致收敛。

四、（15分）设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的函数序列，满足对每一$x\in[a,b]$，导函数$f_n'(x)$存在

（$n=1,2,\cdots$）并且满足下列条件：

（1）存在某一个$x_0\in[a,b]$，使$\{f_n(x_0)\}$收敛；

（2）导函数列$\{f_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛。

证明：$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛

五、（14分）设$f(x)$在$[a,b]$上可导，其导函数$f'(x)$在$[a,b]$可积，对任意的自然数n

记 $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(a+i\dfrac{b-a}{n})\dfrac{b-a}{n}-\int_a^b f(x)dx$，

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\sigma_n=\dfrac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$

六（14 分）设 P 是数域，$A,B\in P^{n\times n}$，E 是 n 阶单位矩阵. 证明：$\forall a,b\in P$

(1) 当 $aA+bB$ 是可逆矩阵时，

$$a^2A(aA+bB)^{-1}A-b^2B(aA+bB)^{-1}B=aA-bB;$$

(2) 当 $aA+bB,aA-bB$ 都是可逆矩阵时，

$$a^2A(aA-bB)^{-1}A(aA+bB)^{-1}-b^2B(aA-bB)^{-1}B(aA+bB)^{-1}=E.$$

七.（20 分）设 $x'Ax$ 是秩为 r 的 n 元半正定二次型.

（1）证明存在秩为 r 的 $n\times r$ 实矩阵 C，使 $A=CC'$；

（2）证明 $x'(A+E)x$ 是 n 元正定二次型.

八.（20 分）设 $A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$ 是数域 P 上的 n 阶非零矩阵（$n>1$），

(1) 求 A 的行列式 $|A|$ 和 A 的秩；

(2) 当 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=k\neq 0$ 时，证明存在 n 阶可逆矩阵 T 使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} k & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

九.（21 分）设 P 是数域，$A\in P^{n\times n}$. 如果 $\forall X\in P^{n\times m}$，规定

$$\mathrm{A}:\ X\mapsto AX,$$

（1）证明 A 是数域 P 上线性空间 $P^{n\times m}$ 的线性变换；

（2）令 $W=\{Y\mid Y\in P^{n\times m},AY=0_{n\times m}\}$，证明 W 是 $P^{n\times m}$ 的 A-子空间；

（3）设秩$(A)=r<n$，求 W 的维数 $\dim W$.