华 中 师 范 大 学

二OO四年研究生入学考试试题

招 生 专 业 基础数学、应用数学 运控、概率论与数理统计　　研究方向

考试科目及代码 数学分析 344　　考试时间 元月11日上午

一、 求下列极限(共 50 分,第 1,2 小题各 10 分,第 3,4 小题各 15 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x})$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{\pi}{2n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$

二、(15 分) 设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,若x_1,x_2是$f(x)$在区间$[a,b]$上的两个零点,证明:存在$\xi\in(a,b)$,使

$$f'(\xi)+f(\xi).g'(\xi)=0$$

三、(15 分) 设$f(x)$在$[a,b]\,(b>a>0)$上连续,在(a,b) 内可导,证明:在(a,b)内存在ξ,η使　　$f'(\xi)=\dfrac{\eta^2\cdot f'(\eta)}{ab}$

四、(15 分) 设$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积,证明:$e^{f(x)}$在$[a,b]$ 上也黎曼可积.

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。　　

五、(15 分) 设$f_n'(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$在$[a,b]$上连续,函数 $g(x)$在$[a,b]$上也连续, 且对$[a,b]$中任意的x_1,x_2 和正整数 n 有

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\le\frac{M}{n}|x_1-x_2| \qquad (M>0\text{为常数})$$

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b g(x).f_n'(x)dx=0$

六、(15 分)设$f_n(x)$ $(n=1,2,3\cdots)$在$[a,b]$连续,且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$. 证明:

1)存在$M>0$, 使对任何自然数 n 有,$|f_n(x)|\le M$, 及$|f(x)|\le M$.

2)若$F(x)$为$(-\infty,+\infty)$上连续函数,则$F(f_n(x))$一致收敛于$F(f(x))$.

七、(10 分) 设函数 $f(x)$在闭区间[-1,1]上具有三阶连续导数,且$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$,证明在(-1,1)内至少存在一点ξ,

使 $f^{(3)}(\xi)=3$

八、(15 分) 设函数$F(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有连续的二阶偏导数,且$F(x_0,y_0)=0,F_x'(x_0,y_0)=0,F_y'(x_0,y_0)>0,F_{xx}''(x_0,y_0)<0$

证明: 由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数$y=f(x)$在x_0点取得极小值 .