华 中 师 范 大 学

二OO四年研究生入学考试试题

招 生 专 业 基础数学，运控 应用数学，概率与统计 研究方向

考试科目及代码 高等代数 459 考试时间 元月11日下午

1.（15分）设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是数域P上n个不同的数，解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a_n \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n = a_n^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = a_n^{n-1}. \end{cases}$$

2.（15分）设P是数域，$A \in P^{n\times n}$，$m(x) = x^3 + 2x + 1$是A的最小多项式，求A^{-1}

3.（20分）设P是数域，$A = (a_{ij}) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \in P^{n\times n}$，$a_{nn}$的代数余子式$A_{nn} \neq 0$，

1） 证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关；

2） 当$|A| = 0$时，求线性方程组$A^*x = 0$的基础解系，其中A^*是A的伴随矩阵。

4.（30 分）设 P 是数域，

$$V_1=\{A\in P^{n\times n}\mid A'=A\},\quad V_2=\{B\in P^{n\times n}\mid B\text{是上三角矩阵}\},$$

1）证明 V_1，V_2 都是 $P^{n\times n}$ 的子空间；

2）证明 $P^{n\times n}=V_1+V_2$，$P^{n\times n}\neq V_1\oplus V_2$.

5.（30 分）设 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，α 是 $p(x)$ 的复根，

1）证明 $p(x)$ 的常数项不等于零；

2）证明对任意正整数 m，$(p(x),\ x^m)=1$；

3）设 $p(x)=x^3-2x+2$，求 $\dfrac{1}{\alpha^5}$.

6.（20 分）设 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x'Ax$ 经过正交线性替换 $x=Qy$（其中 Q 是正交矩阵）化为 $y_1^2+2y_2^2+3y_3^2+\cdots+ny_n^2$，

证明：1） A 的特征值是 1，2，…，n；

2） 存在正定矩阵 B 使 $A=B^2$.

7.（20 分）设 $\mathcal{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，$\alpha\in V$，$\mathcal{A}^{n-1}(\alpha)\neq 0$，$\mathcal{A}^n(\alpha)=0$，证明：

1）$\alpha,\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}^2(\alpha),\cdots,\mathcal{A}^{n-1}(\alpha)$ 是 V 的基；

2）设 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，$a_1,a_2,\cdots,a_n\in P$，$a_1\neq 0$，并且存在向量 $\beta=a_1\alpha+a_2\mathcal{A}(\alpha)+a_3\mathcal{A}^2(\alpha)+\cdots+a_n\mathcal{A}^{n-1}(\alpha)\in W$，则 $W=V$.