华 中 师 范 大 学

二OO五年研究生入学考试试题

招 生 专 业：**数 学**　　研究方向：**基础数学，应用数学，概率论与数理统计，运筹学与控制论**

考试科目及代码：**高等代数（471）**　　考试时间：元 月 23 日 下 午

1．（15 分）设 A 是数域 P 上的 $r\times r$ 阶矩阵，D 是 $s\times s$ 阶矩阵，$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，并且 秩$(M)=$秩$(A)=r$，证明 $D=CA^{-1}B$.

2．（15 分）设 A 是数域 P 上的 $m\times n$ 矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的线性无关的解，$A\beta\neq 0$，证明 $\beta,\ \beta+\alpha_1,\ \beta+\alpha_2,\ \cdots,\ \beta+\alpha_t$ 线性无关。

3．（30 分）设 P 是数域，

$$V=\{\,f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\mid a_i\in P, i=0,1,2,\cdots,n\},$$

(1) 证明 V 关于多项式的加法和数乘多项式构成数域 P 上的线性空间；

(2) $\forall f(x)\in V$，规定 $\mathcal{A}: f(x)\ \mapsto f(x)-xf'(x)$，证明 $\mathcal{A}$ 是 V 的线性变换；

(3) 求线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 下的矩阵。

4．（20 分）设 A 是 $n\times n$ 阶复矩阵，$A^k=0$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 A 的所有非零的特征值，

（1） 证明 $E-A$ 是可逆矩阵，并求 $(E-A)^{-1}$；

（2） 求 $(E-A)^{-1}$ 的所有特征值。

5.（20 分）设 A 是 n 阶正定矩阵，B 是 n 阶半正定矩阵，

（1） 证明 A^{-1} 是 n 阶正定矩阵；

（2） 求实的可逆矩阵 T，使得 $T'(A^{-1}+B)T=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ 是对角矩阵，并说明主对角线上的元素 $a_i>0,\quad i=1,2,\cdots,n.$

6.（20 分）设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 是主对角线上元素之和，

$P^{2\times2}$ 表示数域 P 上所有二阶矩阵构成的集合，$\forall A\in P^{2\times2}$，规定

$$f:\quad A\mapsto \mathrm{Tr}(A),$$

（1）证明 f 是线性空间 $P^{2\times2}$ 的线性函数；

（2）$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 是 $P^{2\times2}$ 的一组基，求 $P^{2\times2}$ 上的线性函数 g，使得 $g(E_{11})=2,\ g(E_{12})=3,\ g(E_{21})=4,\ g(E_{22})=-1.$

7.（30 分）设 V 是数域 P 上的线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换，$\mathscr{A}$ 的最小多项式是 $m(x)=x^2-2x-3$，$\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 表示 $\mathscr{A}$ 的核，$\mathrm{Im}\mathscr{A}$ 表示 $\mathscr{A}$ 的值域，证明：

（1） V 中存在一组基，使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是对角矩阵；

（2） $\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-3\mathscr{E})=\mathrm{Im}(\mathscr{A}+\mathscr{E})$，其中 $\mathscr{E}$ 是 V 的恒等变换；

（3） $V=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-3\mathscr{E})\oplus\mathrm{Ker}(\mathscr{A}+\mathscr{E}).$