华中师范大学

二〇〇六研究生入学考试试题

招生专业：基础数学、概率论与数理统计　　研究方向：

应用数学、运筹学与控制论

考试科目及代码：数学分析（331）　　　考试时间：2 月 15 日上午

一、（30 分）计算题

1、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}}{e^{x-1}-1}$；

2、设 $y=x^x+a^{x^x}$，求 y'；

3、$\int(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x})dx$；

4、设 $f(x,y)=x^y+(y-1)^2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x'(x,1)$；

5、$\iint\limits_D (x+y)e^{x^2+y^2}dxdy$， 其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$；

6、求 $I=\int_L x\sin ydy-\cos ydx$，其中 L 是从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$ 的正弦曲线 $y=\sin x$。

二、（20 分）设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界，证明：

1、$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续；

2、$f(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不一定存在；

3、若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，则 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上至少有一个零点.

三、（20分）设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)$，证明：

1、证明：存在$x_0\in[0,\frac{1}{2}]$，使得$f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{2})$；

2、试推测：对任意正整数n，是否存在$x_0\in[0,\frac{n-1}{n}]$，使得

$f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{n})$，并证明你的结论.

四、（10分）设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$f(x)>0$，记$\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$.

1、求$\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)$；

2、证明：$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上严格单调递增.

五、（10分）证明：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$也绝对收敛.

六、（15分）设$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续，证明：

1、$\{\sin^n x\}$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上不一致收敛；

2、$\{(\sin^n x)f(x)\}$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上一致收敛的充要条件是$f(\frac{\pi}{2})=0$.

七、（10分）设$f(x,y,z)$为R^3上的n次齐次函数（即对任意$t>0$，$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$）且具有一阶连续的偏导数，$f_z'(x,y,z)\neq0$。若方程$f(x,y,z)=0$确定了可微的隐函数$z=g(x,y)$，证明：$z=g(x,y)$必为一次齐次函数.

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。

八、（20分）设$f(x,y)$在R^2上具有二阶连续的偏导数，证明：

1、对R^2内任意光滑简单闭曲线L，总有$\int_L \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) dxdy$，其中$\vec{n}$为$L$的外法线方向，$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$是$f(x,y)$沿$\vec{n}$的方向导数，$D$是$L$围成的有界闭区域；

2、$f(x,y)$为R^2上的调和函数（即$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0$）的充要条件是对$R^2$内任意光滑简单闭曲线$L$，总有$\int_L \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = 0$.

九、（15分）设n是正整数，给定方程$x^n + x = 1$，证明

1、此方程仅有惟一的正根$x_n \in (0,1)$；

2、$\lim_{n \to \infty} x_n = 1$.