华中师范大学

二00六年研究生入学考试试题

招生专业：基础数学　概率论与数理统计　应用数学　运筹学与控制论　　研究方向：

考试科目及代码：高等代数 452　　考试时间：2月15日下午

1. (14分) 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix},\ \text{其中 } x_1x_2\cdots x_n\neq 0.$$

2. (20分) 设 $\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),\cdots,\alpha_r=(a_{r1},a_{r2},\cdots,a_{rn})$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关的充分必要条件是：线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

的解都是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解.

3. (24分) R 是实数域，V 是线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \\ 2x_1 \qquad\ +2x_3-4x_4-\ x_5=0 \\ 3x_1-\ x_2+4x_3+4x_4-4x_5=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \end{cases}$ 的所有解构成的集合.

1) 证明 V 是 $\mathbf{R}^5$（列向量组成的空间）的子空间；
2) 求 V 的基与维数；
3) 求 V 的正交补 $V^\perp$ 的基与维数（$\mathbf{R}^5$ 的内积 $(\alpha,\beta)=\alpha'\beta$）.

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。

4. (32 分) 设 P 是数域，

$$V = \{\, f(x) \in P[x] \mid f(x) = 0 \text{ 或 } \partial(f(x)) < n \,\}.$$

$\forall f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \in V$，规定

$$\mathscr{A}: f(x) \mapsto a_{n-1}x^{n-1}.$$

1) 证明 $\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换；

2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots, x, 1$ 下的矩阵；

3) 求 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的基；

4) 求 $\mathscr{A}$ 的所有特征值和特征向量.

5. (20 分) 设 P 是数域，$A, B \in P^{n\times n}$、$C = AB - BA$，并且 $BC = CB$. 证明：

1) 对大于 1 的自然数 k，有 $AB^k - B^k A = kB^{k-1}C$；

2) 设 $f(\lambda)$ 是 B 的特征多项式，$f'(\lambda)$ 是 $f(\lambda)$ 的微商，则 $f'(B)C = 0$.

6. (20 分) $\mathbf{R}$ 是实数域，$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，且 A 是对称矩阵.

1) 证明 A 的伴随矩阵 A^* 也是实对称矩阵；

2) 试问 A 与 A^* 合同的充分条件是什么？并证明你的结论.

7. (20 分) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的基，

$$V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r),\quad V_2 = L(\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \cdots, \varepsilon_n).$$

1) 证明 V 是 V_1 与 V_2 的直和（即 $V = V_1 \oplus V_2$）；

2) 设 $\mathscr{A}$ 是 V_1 的线性变换，$\mathscr{B}$ 是 V_2 的线性变换，求 V 的线性变换 $\mathscr{C}$，使得 V_1 与 V_2 都是 $\mathscr{C}$ 的不变子空间，并且 $\mathscr{C}$ 在 V_1 与 V_2 上的限制分别是

$$\mathscr{C}\mid V_1 = \mathscr{A},\quad \mathscr{C}\mid V_2 = \mathscr{B}.$$

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。