华中师范大学

二OO七年研究生入学考试试题

院系、招生专业：数学与统计学学院各专业　　考试时间：元月21日下午

考试科目代码及名称：436，高等代数

1．(20分)　设 $f(x)$ 是非零复多项式；用 $f'(x)$ 记 $f(x)$ 的微分 (导数) 多项式；设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的最大公因式；设整数 $m>1$. 证明：复数 c 为 $f(x)$ 的 m 重根的必要充分条件是 c 为 $d(x)$ 的 $m-1$ 重根. 请说明这里为什么需要假设 $m>1$?

2．(30分)　设 A 是 $m\times n$ 矩阵；设 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 是线性方程组 $AX=0$ 的非零解. 证明：

(1) 如果 A 的任何列向量非零，则 $a_1,\cdots,a_n$ 中至少两个非零.

(2) 如果 A 的任何两个列向量线性无关，则 $a_1,\cdots,a_n$ 中至少三个非零.

(3) 推广 (1), (2), 你得到什么结论？请证明你的结论.

3．(30分)　对 $m\times n$ 矩阵 A, 记 A' 是 A 的转置矩阵.

(1) 设 A 是实矩阵；证明：实线性方程组 $AX=0$ 与实线性方程组 $(A'A)X=0$ 同解.

(2) 证明：实矩阵 A 的秩与矩阵 $A'A$ 的秩相等.

(3) 在复数域，上述结论成立吗？为什么？

(4) 对复数域，你认为应如何修改断言 (2) 得到一个正确断言？为什么？

4．(20分)　设 A 是实方阵. 证明：如果下面三条中的任意两条成立则另一条也成立：

(a) A 是正交矩阵.　　(b) A 是对称矩阵.　　(c) $A^2=E$, 其中 E 表示单位矩阵.

5．(20分)　已知 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ 的特征根为 1, 2, 3, 其中 a,b 是实数. 求 a,b, 并求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 是对角矩阵其对角线元素依次为 1, 2, 3.

6．(30分)　用 $\mathbb{C}$ 表示复数域. 设 A 是 $n\times n$ 复矩阵, 设 A 的特征多项式 $\Delta_A(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda)$, 其中 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互素. 在 n 维向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中, 设 $\mathcal{F}$ 是齐次线性方程组 $f(A)\cdot X=0$ 的解子空间, $\mathcal{G}$ 是齐次线性方程组 $g(A)\cdot X=0$ 的解子空间. 证明：

(1) $\mathcal{F}=\left\{ g(A)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n \right\}$, $\mathcal{G}=\left\{ f(A)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n \right\}$.

(2) $\mathbb{C}^n=\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}$.

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效.