

华中师范大学

二〇〇七年研究生入学考试试题

招生专业:

研究方向:

考试科目及代码: 高等数学

代码

考试时间: 元月21日上午

题号	一	二	三	四	总分
分值	40分	40分	64分	6分	150分
得分					

一、 选择题: 本大题共 10 个小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 把所选项前的字母填在答题纸上。

1. 函数 $y = 2^x$ 与 $x = \log_2 y$ 分别表示的曲线 ()

- A. 是同一条曲线 B. 关于 x 轴对称
C. 关于 y 轴对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ ()

- A. 是无穷小 B. 是无穷大 C. 有界, 但不是无穷小 D. 无界, 但不是无穷大

3. 可导函数 $y = f(x)$ 满足 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{2x} =$ ()

- A. $\frac{3}{2} f'(x)$ B. $\frac{3}{2} f'(0)$ C. $\frac{2}{3} f'(0)$ D. $\frac{2}{3} f'(x)$

4. 设 $f(x) = \sqrt{\sin x}$, 则在点 $x = 0$ 处 ()

- A. 有极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 但不连续 B. 连续, 但不可导
C. 右连续, 右导数存在 D. 右连续, 右导数不存在

5. 设 $e^{-x} + \sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则导数 $f'(x) =$ ()

- A. $e^{-x} + \cos x$ B. $-e^{-x} + \cos x$ C. $e^{-x} - \sin x$ D. $-e^{-x} - \sin x$

6. $\frac{d}{dx} \int_1^2 e^{-x^2} dx =$ ()

- A. $e^{-1} - e^{-4}$ B. $e^{-4} - e^{-1}$ C. 0 D. e^{-x^2}

7. 设 \vec{a}, \vec{b} 为非零向量, λ 为非零常数, 向量 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 垂直于向量 \vec{b} , 则 λ 等于 ()

- A. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ B. $-\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ C. 1 D. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

注: 答案请写在答题纸上, 在试卷上作答无效。

8. 平面 $x+2y-z+3=0$ 与空间直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ 的位置关系是 ()
- A. 互相垂直 B. 互相平行但直线不在平面上
C. 斜交 D. 直线在平面上
9. 设 $f(x,y,z) = \ln(\sin x - yz)$, 则 $f'_x(0,1,1)$ 及 $f'_y(0,1,1)$ 的值依次为 ()
- A. $-1, 1$ B. $1, -1$ C. $-1, -1$ D. $1, 1$
10. 微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ 的通解是 ()
- A. $c_1e^x + c_2e^{-x}$ B. $(c_1 + c_2x)e^{-x}$
C. $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ D. $x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

二、填空题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。把答案填在答题纸上。

11. 设极限的定义表述为 $\forall \varepsilon, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 $x \rightarrow$ _____ 时, 函数以 A 为极限, 记为 _____.
12. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin wx}{2x} = 3$, 则 $w =$ _____.
13. 曲线 $f(x) = x + e^x$ 上点 $(0, 1)$ 处的法线方程为 _____.
14. $y = 5^x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值是 _____.
15. 设 $\int f(x) dx = \arcsin x + c$, 则 $f(x) =$ _____.
16. $\int_{-1}^1 (2x + |x|)^2 dx =$ _____.
17. 向量 $\vec{a} = \{1, -2, 3\}$ 在 y 轴上的投影为 _____.
18. 设 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} =$ _____.
19. 交换积分次序有 $\int_0^4 dy \int_{\frac{y}{4}}^y f(x \cdot y) dx = \int_0^4 dx \int_x^{4x} f(x \cdot y) dy$, 则 $\varphi(x) =$ _____.
20. 微分方程 $y'' + 4y = 0$ 的通解是 _____.

三、计算题：(共 8 题，每题 8 分，共 64 分，须写出主要步骤。)

21、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$

22、设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t (x \neq 0)$ ，求 $f'(\ln 2)$

23、设 $f(x) = 3^x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln \sin x$ ，求 $f''(x)$

24、求不定积分 $\int x \sin x \cos x dx$

25、求由曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $y = x - 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积及其绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

26、设 f 具有连续偏导数， $z = f(x + y, x^2 y^2)$ ，求 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$

27、求微分方程 $\frac{dy}{dx} + 2y = 4xe^{-2x}$ 的通解。

28、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛区间及其和函数。

四、证明题 (本题 6 分)

29、设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导， $f(a) = f(b) = 0$ ，且 $g(x) \neq 0$ ， $x \in [a, b]$ 。试证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使 $f'(\xi)g(\xi) = g'(\xi)f(\xi)$ 。