

# 华中师范大学

## 二〇〇七年研究生入学考试试题

招生专业：运筹学与控制论

研究方向：模式识别与图像处理

考试科目及代码：公共数学

代码 623

考试时间：元月21日上午

一、 选择题： 本大题共6个小题。每小题5分，共30分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在答题纸上。

1. 当  $x \rightarrow 0$  时，下列函数中是较  $x$  高阶的无穷小的是 ( ) .
- A.  $e^x - 1$                       B.  $2^x - 1$                       C.  $(1+x)^2 - 1$                       D.  $\cos x - 1$
2. 函数  $f(x) = \frac{x}{\tan x}$  在  $(-2\pi, 2\pi)$  内的可去间断点 ( ) .
- A. 仅为  $x=0$                       B. 为  $x = -\pi, \pi$
- C. 仅为  $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi$                       D. 为  $x=0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi$
3. 当  $a < x < b$  时， $f'(x) < 0$ ， $f''(x) > 0$ ，则在区间  $(a, b)$  内曲线段  $y = f(x)$  的图形 ( ) .
- A. 沿  $x$  轴正方向下降且向上凹                      B. 沿  $x$  轴正方向下降且向下凹
- C. 沿  $x$  轴正方向上升且向上凹                      D. 沿  $x$  轴正方向上升且向下凹
4. 矩形闸门宽  $a$  米，高  $h$  米，垂直放入水中，上沿与水面平齐，则闸门压力  $p =$  ( ) .
- A.  $\int_0^h ah dh$                       B.  $\int_0^h ah dh$
- C.  $\int_0^h \frac{1}{2} ah dh$                       D.  $\int_0^h 2ah dh$
5. 如果简单闭曲线  $L$  所围平面区域的面积为  $S$ ， $L$  取逆时针方向，则  $S =$  ( ) .
- A.  $\frac{1}{2} \oint_L x dx - y dy$                       B.  $\frac{1}{2} \oint_L y dy - x dx$
- C.  $\frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$                       D.  $\frac{1}{2} \oint_L y dx - x dy$
6. 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$  在  $x = -1$  处收敛，则此级数在  $x = 2$  处 ( ) .
- A. 条件收敛                      B. 绝对收敛
- C. 发散                      D. 可能收敛也可能发散

二、填空题：本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分。把答案写在答题纸上。

7. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(2x)} = 2$ ，则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{\sin x} =$  \_\_\_\_\_.

8. 要使函数  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$  在  $x=0$  连续，则应补充定义使  $f(0) =$  \_\_\_\_\_.

9. 设  $y = \frac{1}{\pi + \cos x}$ ，则导数  $y'|_{x=\frac{\pi}{2}} =$  \_\_\_\_\_.

10. 设点  $(1, 3)$  为曲线  $y = ax^3 + bx^2$  的拐点，则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.

11. 广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}} =$  \_\_\_\_\_.

12. 设  $z = \arctan(x^2 - 3y^2)$ ，则  $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} =$  \_\_\_\_\_.

13. 函数  $u = x^2 + y^2 - z^2$  在点  $A(1, 0, 0)$  和点  $B(0, 1, 0)$  的梯度间的夹角为 \_\_\_\_\_.

14. 微分方程  $xy' + 2y = x \ln x$  满足  $y(1) = -\frac{1}{9}$  的解为 \_\_\_\_\_.

15. 交换二重积分的积分次序，则  $\int_0^4 dx \int_x^{\sqrt{4x}} f(x, y) dy =$  \_\_\_\_\_.

16. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  的和函数为 \_\_\_\_\_.

三、解答题：(本大题共 7 个小题，每小题 8 分，共 56 分。解答须有主要步骤。)

17. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ .

18. 设  $y = \ln(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})$ ，求导数  $y'$ .

19. 求不定积分  $\int \frac{dx}{x(x^{10} + 1)}$ .

20. 计算定积分  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx$ .

21. 设  $yoz$  平面上的椭圆  $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$  绕  $z$  轴旋转一周所生成的曲面为  $F$ ,  $F$

与平面  $z=2$  的交线为  $l$ , 求  $l$  在  $xoy$  平面上的投影方程.

22. 计算  $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$ , 其中  $D$  是由两条抛物线  $y=\sqrt{x}$ ,  $y=x^2$  所围成的区域.

23. 将  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  展开为麦克劳林级数.

#### 四. 证明题 (共 14 分)

24. 已知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0)=0$ ,  $f(1)=1$ .

证明:

① 存在  $c \in (0, 1)$ , 使得  $f(c) = 1 - c$ ;

② 存在两个不同的点  $\xi, \eta \in (0, 1)$ , 使  $f'(\xi) \cdot f'(\eta) = 1$