# 华中师范大学

## 二〇〇七研究生入学考试试题

院系、招生专业：数统学院、概率论与数理统计 考试时间：元月 21 日上午

考试科目代码及名称：数学分析 （622）

一、（30分）计算题

1、$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln^3(1-x)\sin[\sin(\ln\frac{1}{x})]}{e^{x^2}-1}$；

2、设 $y=x^{\ln x}+x^x$，求 $y'$；

3、$\int_0^{+\infty}e^{-x^4}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^4}\mathrm{d}x$；

4、设 $f(x,y)$ 可微，且 $f(1,1)=1$，$f_x(1,1)=a$、$f_y(1,1)=b$，

令 $F(x)=f[f(x,x),f(x,x)]$，求 $F'(1)$。

5、$\iint\limits_D(x^3+y^3)e^{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$；



6、求 $I=\int_L e^x\sin y\mathrm{d}y-e^x\cos y\mathrm{d}x$，其中 $L$ 是从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$ 的下半圆周 $x^2+y^2=2x$。

二、（25分）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，且 $\sqrt{x}\cdot f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界，证明：

1、$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续；

2、$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 存在；

3、若将条件"$\sqrt{x}\cdot f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界"改为"$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot f'(x)$ 都存在"，试问：还能否推出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续，如果

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。

能请证明你的结论，如果不能请举出反例.

三、(25 分) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内 4 阶可导，

1、若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$；

2、若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(4)}(x)$ 都存在，是否能推出对任意的正整数 $1\le k\le 4$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)$ 都存在且为 0，请证明你的结论.

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$（$A$ 可以为 $+\infty$ 或 $-\infty$），试证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A$.

五、(15 分) 设 $a_n>0$，$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 收敛.

六、(15 分) 若 $a_n$ 单调递减，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，证明：

1、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $[\alpha,2\pi-\alpha]$ 上一致收敛，其中 $0<\alpha<\pi$；

2、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

七、(15 分) 设 $u=u(x,y)$ 是由方程组 $\begin{cases}u=zx+yf(z)+g(z)\\ x+yf'(z)+g'(z)=0\end{cases}$ 所确定的二阶连续可微的隐函数，其中 $f,g$ 有二阶连续的导数，证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

八、（15分）设 $f(x,y,z)$ 在 $\mathrm{R}^3$ 上具有二阶连续的偏导数，证明：

1、对 $\mathrm{R}^3$ 内任意光滑简单闭曲面 $S$，总有

$$\oiint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}S = \iiint_V \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\vec{n}$ 为 $S$ 的外法线方向，$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ 是 $f(x,y,z)$ 沿 $\vec{n}$ 的方向导数，$V$ 是 $S$ 围成的有界闭区域；

2、$f(x,y,z)$ 为 $\mathrm{R}^3$ 上的调和函数（即 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$）的充要条件是对 $\mathrm{R}^3$ 内任意光滑简单闭曲面 $S$，总有 $\oiint_S \dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}S = 0$。