

华中师范大学

二〇〇八年研究生入学考试试题

招生专业：运筹学与控制论

研究方向：模式识别与图像处理

考试科目及代码：公共数学

代码 619

考试时间：元月 20 日 上午

一、 选择题： 本大题共 6 个小题。 每小题 5 分， 共 30 分。 在每小题给出的四个选项中， 只有一项是符合题目要求的， 把所选项前的字母填在答题纸上。

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续， 则 $f(x) = \int_0^x tf(t^2)dt$ 是 ()。

A. 连续的奇函数

B. 连续的偶函数

C. 非奇非偶函数， 不连续

D. 非奇非偶函数， 连续

2. 设 $f(x)$ 在点 a 可导， 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a)}{h} =$ ()。

A. $2f'(a)$

B. $-2f'(a)$

C. $\frac{1}{2}f'(a)$

D. $-\frac{1}{2}f'(a)$

3. 函数 $y = \ln(1+x^2)$ 的图形为凹弧的区间是 ()。

A. $(-\infty, +\infty)$

B. $(-\infty, -1)$

C. $(-1, 1)$

D. $(1, +\infty)$

4. 设 $P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$ ， $Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$ ， 则 ()。

A. $P < Q$

B. $P > Q$

C. $P = -Q$

D. $P = Q$

5. 交换二次积分次序有 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{\varphi} f(x, y) dx$ 则 $\varphi =$ ()。

A. $1-y$

B. $y-1$

C. $1-x$

D. 1

6. 下列级数中条件收敛的是 ()。

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

二、填空题：本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分。把答案写在答题纸上。

7. 函数 $f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ 的间断点有 _____.

8. 函数 $y = 3x^3 - 4x + 1$ 的极大值为 _____.

9. 函数 $y = xe^{-x}$ 的图形上的拐点是 _____.

10. 定积分 $\int_{-1}^1 (|x| + \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}) dx =$ _____.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积，且 $f(x) = x^2 + 2 \int_0^1 f(x) dx$,

则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

12. 设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$ ，则 $dz|_{(1,0)} =$ _____.

13. 设积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ ，则二重积分 $\iint_D xy^2 d\sigma =$ _____.

14. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n^2 + 1}$ 的收敛域为 _____.

15. 已知向量 \vec{a} 和 \vec{b} 的模为 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ ，则 $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 =$ _____.

16. 微分方程 $e^{x-y} \frac{dy}{dx} = 1$ 的通解是 _____.

三、解答题：(本大题共 7 个小题，每小题 8 分，共 56 分。解答须有主要步骤。)

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3})$.

18. 设 $y = \sin(\cos^2 x) + \cos(\sin^2 x)$ ，求 y' .

19. 设 $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$ ，求高阶导数 $f^{(2008)}(x)$.

20. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin x} dx$.

21. 求函数 $F(x) = \int_0^x \frac{3t}{t^2 - t + 1} dt$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值。

22. 求微分方程 $y'' + 2y' = 3e^{-2x}$ 的通解。

23. 计算二重积分 $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$ ，其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 。

四. 证明题 (共 14 分)

24. 试证方程 $x^7 + x - 1 = 0$ 只有一个正根。