华中师范 大学
二零零九年研究生入学考试试题

一、（30 分）计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\left(x^{\alpha}\right)\cos\left[\sin\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)\right]}{(1+x)^{\beta}-1}$，其中$\alpha>1,\beta>0$均为常数。

2. 计算二重积分$\iint\limits_{D}\dfrac{\sin y}{y}dxdy$，其中$D$是由$y=x, y=1$和$x=0$所围成的区域。

3. 求曲线积分$\oint_{C}\dfrac{(x-1)dy-(y-2)dx}{4(x-1)^2+(y-2)^2}$，其中$C$是平面内任意一条不过点$(1,2)$的正向简单光滑封闭曲线。

二、（12 分）设函数$f(x)$定义在开区间(a,b)内，若对任意$c\in(a,b)$，都有$\lim\limits_{x\to c}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$也存在，则$f(x)$在开区间$(a,b)$内有界。

三、（12 分）证明含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$$

在$[\delta,+\infty)$上一致收敛（其中$(\delta>0)$），在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

四、（20 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可微，且存在$M>0$，使得$\forall x\in(0,1)$，$\left|xf'(x)-f(x)\right|<xM^2$，证明：

（1）$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,1)$内一致连续；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$存在。

五、（20 分）证明下面的结论：

（1）若$f(x)$在$[0,1]$上连续，则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$。

（2）若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$。

六、（18 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处的连续性，偏导数的存在及可微性。

七、（20 分 ）设函数列 $\{f_n(x)\}$ 中的每一项函数 $f_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数，试证明：

（1）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ 都绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

（2）若每一项 $f_n(x)$ 的单调性相同，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛。

八、（18 分）设 f 连续，证明：

（1）$\iiint\limits_V f(z)dxdydz = \pi\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)dx$；其中 $V: x^2+y^2+z^2\le 1$。

（2）记函数 $F(a,b,c)=\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz$，其中 $V: x^2+y^2+z^2\le 1$。证明：球面 $a^2+b^2+c^2=1$ 为函数 $F(a,b,c)$ 的等值面，即函数 $F(a,b,c)$ 在 $a^2+b^2+c^2=1$ 上恒为常数，并求出此常数