

武汉理工大学 2004 年研究生入学考试试题

318

课程 高等数学

(共 1 页, 共十二题, 答题时不必抄题, 标明题目序号)

一. 填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]^{\frac{1}{x(e^x - 1)}} =$ _____

(2) 已知 $f(x) = g(e^{-x})$, $g'(1) = g'(1) = 1$, $f'(0) =$ _____

(3) 已知 $f'(e^x) = xe^{2x}$, $f(x) =$ _____

(4) $\int_0^1 dx \int_0^1 xe^{-x} dy =$ _____

(5) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)3^n} x^{2n}$ 的收敛半径是 _____

(6) 微分方程 $y' = \frac{1}{2x + 4y^2}$ 的通解是 _____

二. 选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

(1) 函数 $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} + x \cos \frac{1}{x}$ 的间断点是() 间断点

- A. 无穷 B. 跳跃 C. 可去 D. 震荡

(2) 函数 $f(x) = 2^x - x - 1$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上()

- A. 单调增加上凸 B. 单调增加上凹 C. 单调减少上凸 D. 单调减少上凹

(3) 下列广义积分收敛的是()

A. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x-1}}$ B. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (x-1)}$ C. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}}$ D. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-1)^2}}$

(4) 函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的偏导数存在是在 (x_0, y_0) 处连续的() 条件

- A. 充分 B. 必要 C. 充分必要 D. 无关的

(5) 平面 $x + 2y - 4z = 1$ 与直线 $\frac{x+1}{2} = y-3 = z-1$ 的位置关系是()

- A. 垂直 B. 平行但不重合 C. 重合 D. 相交成锐角

(6) 下列无穷级数发散的是()

A. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n^2} \sin \frac{1}{n}$ B. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2} \sin \frac{1}{n}$ C. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \sin \frac{1}{n^2}$ D. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \sin \frac{1}{n}$

三. (本题满分 10 分)

计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1^n + 2^n + 3^n + \cdots + 2004^n)^{\frac{1}{n}}$.

四. (本题满分 10 分)

以知 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\cos(\theta x)}{120}x^5, [\theta \in (0, 1)]$, 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$.

五. (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$.

六. (本题满分 10 分)

计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^x} dx$.

七. (本题满分 10 分)

以知直线 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 与 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$, 求公垂线的方程及公垂线的长.

八. (本题满分 10 分)

以知函数 $z = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ 具有二阶连续偏导数, 计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

九. (本题满分 10 分)

计算 $\oint_L \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - y + 1 \right) dx + \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} + x - 1 \right) dy$, 其中 L 是包含 $(0, 0)$ 点的分段

光滑的无重点的连续闭曲线的逆时针方向, 所包围的平面区域 D 的面积为 A .

十. (本题满分 10 分)

计算 $\oint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 是 $yo z$ 平面的曲线 $z = y^3 (y \in [0, 1])$ 绕 z

轴旋转一周而成的旋转曲面的上侧.

十一. (本题满分 12 分)

(1). 把函数 $y = \arctan x (x \in (-1, 1])$ 展开成为 x 的幂级数, 计算 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(2). 把函数 $f(x) = x^2 (x \in [0, \pi])$ 展开成为周期 2π 的正弦级数, 计算 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

十二. (本题满分 10 分)

如图所示的建筑物 A, 密度为常数 ρ , 高度为 H , 顶部横截面积为 D , 上面放置的半球形物体 B 的质量为 M , 若建筑物 A 的任一高度 h 处的横截面有相同的压强 (单位面积的压力) $\frac{Mg}{D}$, 试确定高度 h 处的横截面积 $S(h)$ 与高度 h 的函数关系.

