2002 年中国地质大学研究生院

规定学科 专业研究生入学考试 高等数学(统考) 试题

1．填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

（1）如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+1}{ax^m+3x^2-2}=\dfrac{5}{6}$，那么 m=____；a=____。

（2）设 $y=e^{x^2}$，则 $y^{(2002)}(0)=$________。

（3）$\int\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=$______________。

（4）已知 $4y''-12y'+9y=e^{\frac{3}{2}x}(3x^2+2)$，则用待定系数法确定的特解形式为______________。

（5）若 A,B 为 n 阶方阵，且秩 $R(A)=n-2$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $R(BA^*)=$____。

2．单项选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

（1）设 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 不是无穷大，则下述命题正确的是 [ ]

（A）设 $x\to x_0$ 时 $g(x)$ 是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小；

（B）设 $x\to x_0$ 时 $g(x)$ 不是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小；

（C）设在 $x=x_0$ 邻域 $g(x)$ 无界，则 $x\to x_0$ 时 $f(x)g(x)$ 必是无穷大；

（D）设在 $x=x_0$ 邻域 $g(x)$ 有界，则 $x\to x_0$ 时 $f(x)g(x)$ 必不是无穷大。

（2）设 $f(x)=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}+\dfrac{1}{x-d}$，(a<b<c<d)，则方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有的实根个数为 [ ]

（A）1；（B）2；（C）3；（D）4 。

（3）广义积分收敛的是 [ ]

（A）$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x(\ln x)^2}$；（B）$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$；

（C）$\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx$；（D）$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$。

（4）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+b_n}}$ [ ]

（A）条件收敛；（B）绝对收敛；（C）发散；（D）收敛性与 b_n 有关。

（5）已知向量组 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\eta}$ 线性无关，下列结论正确的是 [ ]

（A）$\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma}+\vec{\eta},\vec{\eta}+\vec{\alpha}$ 线性无关；（B）$\vec{\alpha}-\vec{\beta},\vec{\beta}-\vec{\gamma},\vec{\gamma}-\vec{\eta},\vec{\eta}-\vec{\alpha}$ 线性无关；

解答题（本题满分 20 分，每小题 5 分）

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\arctan(x-t)dt}{\sin 3x\cdot\ln(1+2x)}$。

（2）设 $y=\int_0^x(x-t)f(x+t)dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

（3）设 $u=f(x,y,z)$，$z=xe^y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$。

（4）求函数 $u=x^2y^2+yz^3$ 在点 $M_0(1,2,1)$ 处沿梯度方向的方向导数。

（6 分）求点 $M_1(4,3,10)$ 关于直线 L：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$ 的对称点 $M_2(x,y,z)$。

（6 分）计算 $\int_0^1dy\int_y^1\sqrt{x^2-y^2}\,dx$。

（5 分）设 $f(x)$ 在[0，1]上连续，且 $\int_0^1xf(x)dx=\int_0^1f(x)dx$，证明：至少存在一 $\xi\in(0,1)$ 使 $\int_0^{\xi}f(x)dx=0$ 。

（6 分）求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛域及和函数。

（6 分）证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$。

（8 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，3 阶矩阵 B 满足关系式 $A^2+AB+A=B$，求 B。

.（8 分）$y(t)$ 为某个国家在时刻 t 的人口总数，视 $y(t)$ 为 t 的光滑函数。设该国口总数在时刻 t 的变化率与人口总数成比例，比例系数为 $r(t)=a-by(t)$，已知 0.029。假设该国 1979 年底人口总数为 97092 万人，$r(1979)=1.45\%$。试预测该在 2002 年底，2050 年底，2500 年底的人口总数。

.（5 分）设 a，d 是正数，且 $a<d$，考虑等差数列

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots,\ a+(n-1)d,\ \cdots$$

A_n 表示上述数列前 n 项的算术平均值，G_n 表示该数列前 n 项的几何平均值。证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{G_n}{A_n}=\dfrac{2}{e}$，其中 e 是自然对数的底。