数

请按题号

装

订

线

2002 年中国地质大学研究生院

应用数学 专业研究生入学考试解析几何与高等代数题

一、(5 分) 已知方程 $x^3-6\sqrt{3}x^2+35x-22\sqrt{3}=0$ 三根成等差数列，解这个方程。

二、(5 分) 设线性方程组 $\begin{cases} bx_1+(2+b-a)x_2+(ab^2-2a)x_3=0 \\ -x_1+(a-3)x_2+abx_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$，的基础解系含有两个解向量，求常数 a 与 b.

三、(8 分) 计算 $f(x+1)-f(x)$，其中 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & x^3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & x^4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & x^5 \end{vmatrix}$.

四、(10 分) 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，其中 E 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 B.

五、(10) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$，其中 t_1,t_2 为常数，试问 t_1,t_2 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

六、(10 分) 已知直线 $L_1:\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=z$，$L_2:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$，求 L_1，L_2 之间的距离 d.

七、(10 分) 设 T 是线性空间 V 的一个线性变换，证明

(1) 若 $T^2=T$，则 T 的特征值只能是 0 或 1;

八、(10 分) 求以原点为顶点，过三坐标轴的圆锥面方程.

九、(10 分)

(1) 证明欧氏空间 (维数有限或无限) 中的正交变换之积仍为正

(2) 证明正交变换是一一变换.

十、(10 分) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是一实二次型，若有实 n 维向量

$X_1^TAX_1>0$，$X_2^TAX_2<0$，证明存在 n 维实向量 $X_0\neq O$，使 $X_0^TAX_0$

十一、(12 分) 设向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 能由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix}=K\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix},$$

其中 K 为 $r\times s$ 矩阵，且 A 组线性无关，证明 B 组线性无关的充

秩$(K)=r$.